Fifth SI Edition

CHAPTER

3

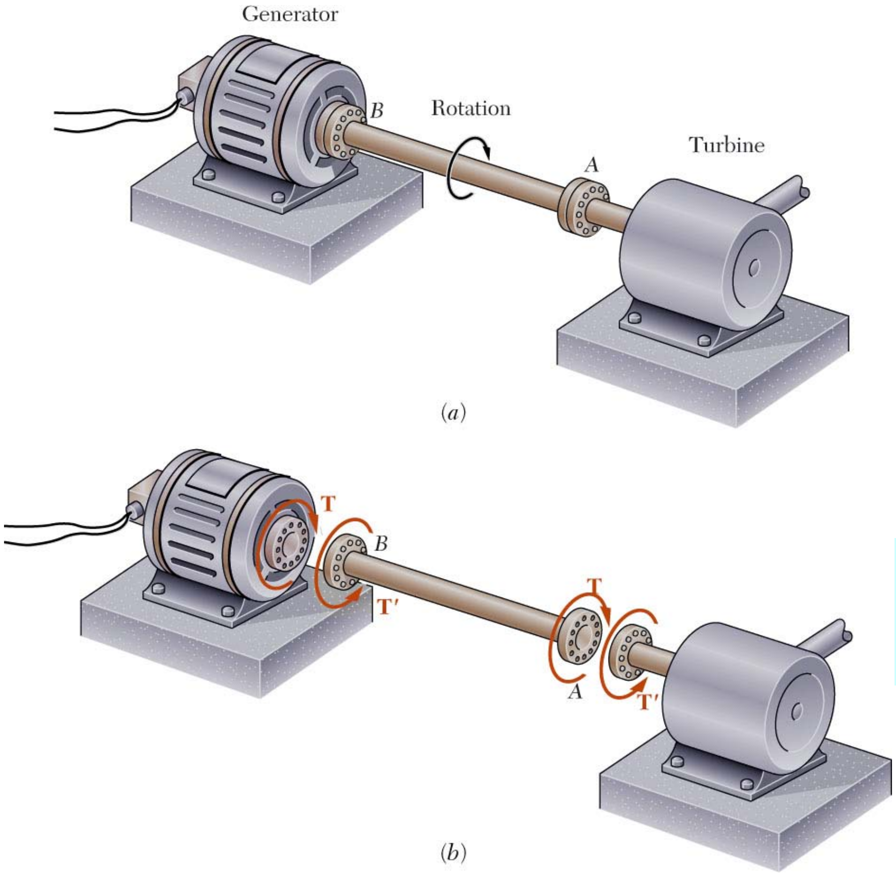
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

비틀림
(Torsion)

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

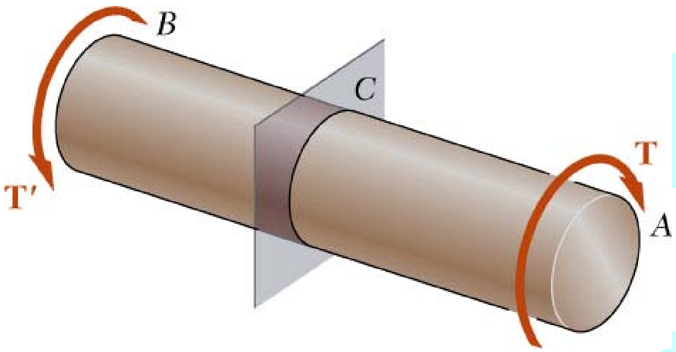
목차 (Contents)

원형축의 비틀림 하중(Torsional Loads on Circular Shafts)



- 비틀림 우력(twisting couples) 혹은 토크 **T**와 **T'**를 받는 원형단면부재의 응력과 변형률 해석
- 터빈은 축에 비틀림우력 혹은 토크 T를 발생
- 축이 다시 발전기에 같은 토크를 전달
- 발전기는 크기가 같고 방향이 반대인 토크 T'을 전동축에 전달

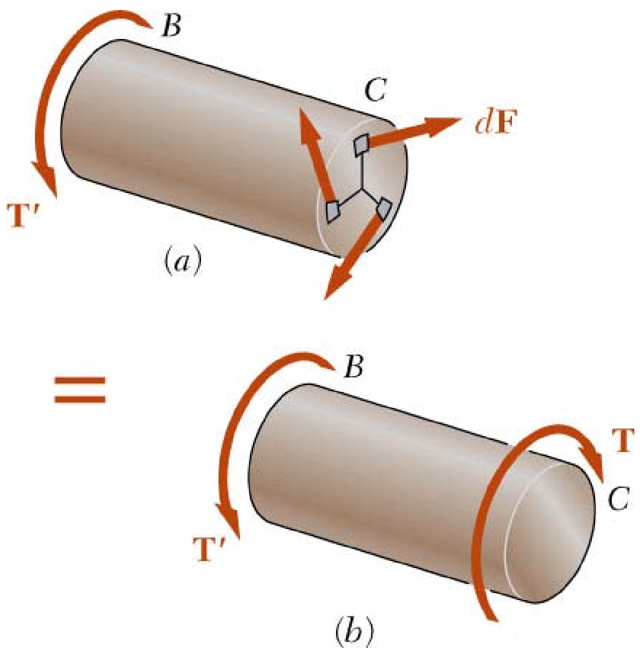
내부응력에 의한 토크(Net Torque Due to Internal Stresses)



- 평형조건은 이 미소 힘 계가 T'과 크기가 같고 방향이 반대인 내부 토크 T와 같아야 함

$$T = \int \rho \, dF = \int \rho(\tau \, dA)$$

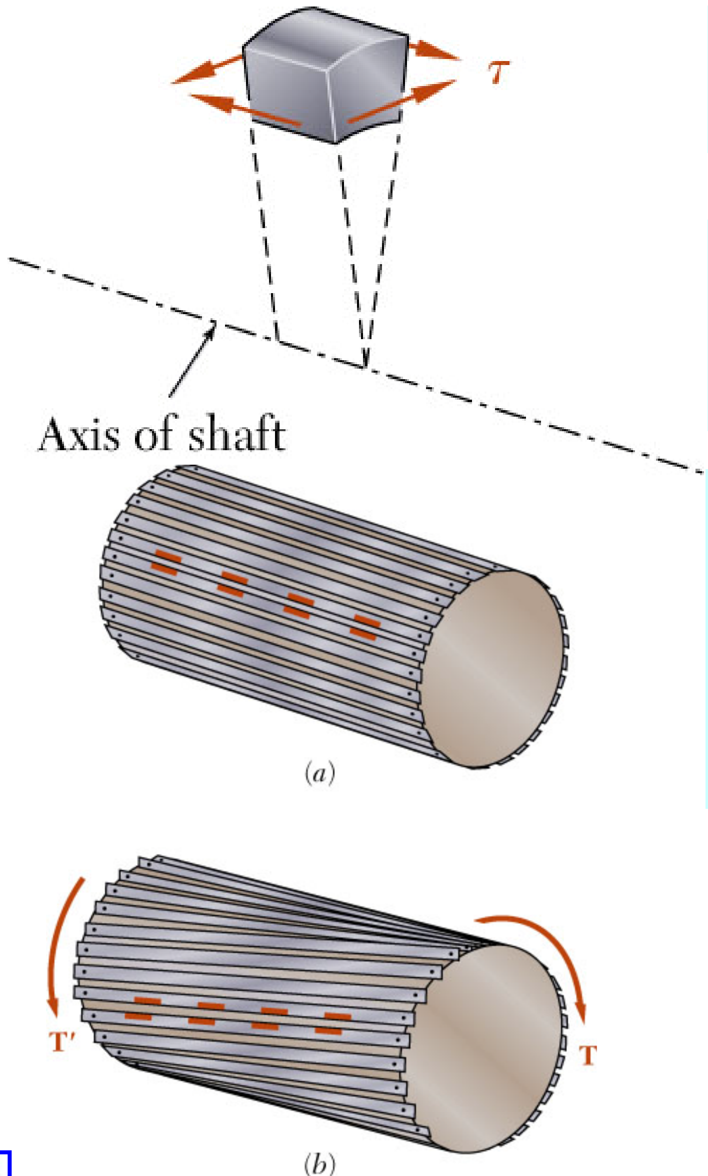
- 임의 단면상에 분포하는 전단응력에 의해 만족되어야 하는 평형조건을 나타내지만 이 응력이 축의 단면상에 어떻게 분포되고 있는가는 표시하고 있지 않음



- 주어진 하중하의 실제 응력분포는 부정정 상태-축변형을 고려해야 함.

- 중심 축하중에 의한 수직응력이 균일하게 분포한다고 가정하였으나, 탄성축의 전단응력 분포에 대해서는 같은 가정이 적용될 수 없음.

축방향 전단성분(Axial Shear Components)



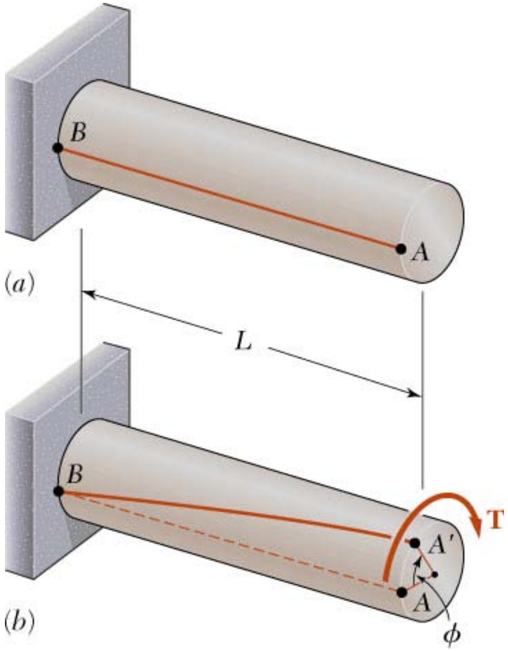
- 축에 작용하는 토크는 축선에 수직한 전단응력을 발생.

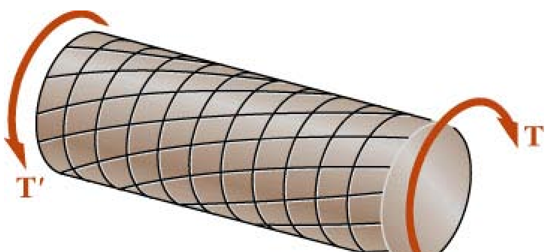
- 평형조건은 축선을 포함하고 있는 두 평면에 의해 형성된 면상에도 동일한 응력을 필요.

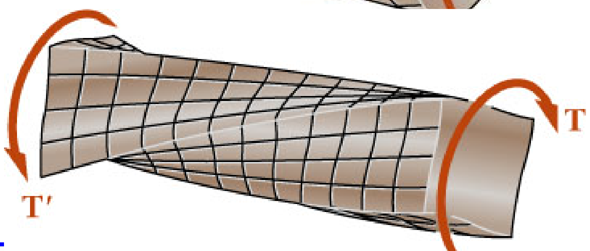
- 비틀림에서 발생되는 이와 같은 전단응력은 그림과 같이 분리한 많은 얇은 판조각(slat)을 양단에서 원판(disk)에 핀으로 고정하여 만든 "축"으로 생각하여 설명할 수 있음.

- 축의 양단에 크기가 같고 방향이 반대인 토크가 작용할 때 이들 판 조각들은 서로 미끄러짐.

축변형(Shaft Deformations)







- T의 어떤 범위 내에서는 비틀림 각 ϕ는 작용된 토크 T와 길이 L에 비례.

$$\phi \propto T$$

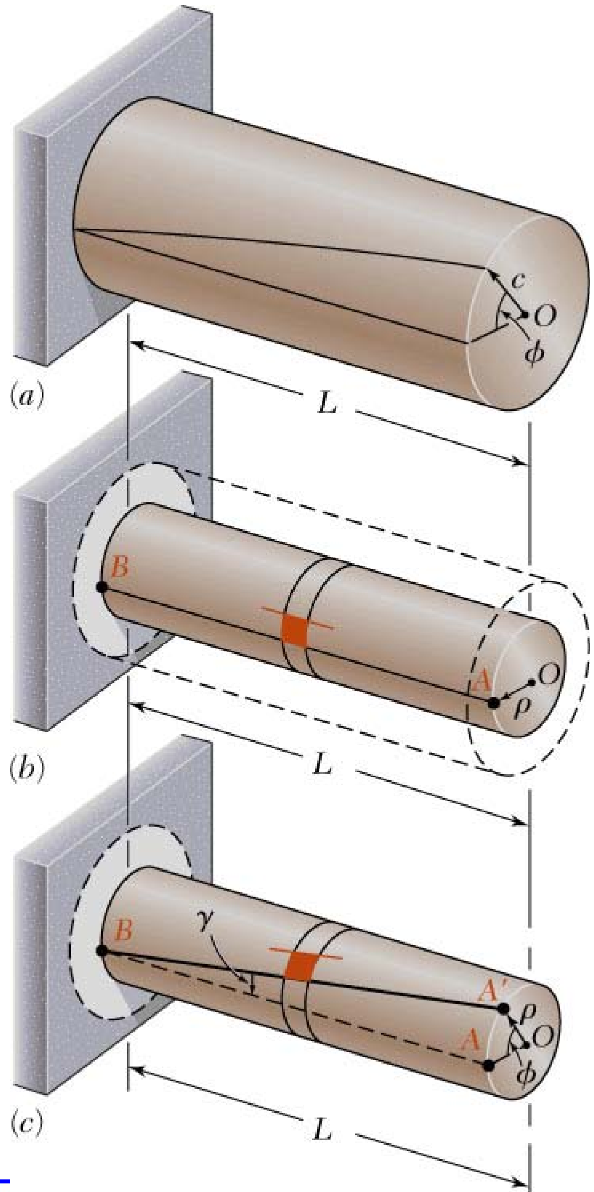
$$\phi \propto L$$

- 평형 단면축이 비틀림을 받을 때 모든 단면은 평면을 유지하며 뒤틀리지 않음.

- 원형단면축의 단면이 평면을 유지하며, 평면이 뒤틀리지 않는 이유는 단면이 축대칭(axisymmetric)이기 때문임.

- 축대칭이 아닌 비원형단면 축은 비틀림을 받으면 각 단면들은 뒤틀어지고 평면을 유지하지 못함.

전단변형률(Shearing Strain)



- 축이 비틀림 하중을 받으면 이 미소요소는 마름모형(rhombus)으로 변형.

- 고려된 요소의 두 변을 정의하는 원은 변화하지 않기 때문에 전단 변형률은 비틀림 각과 동일.

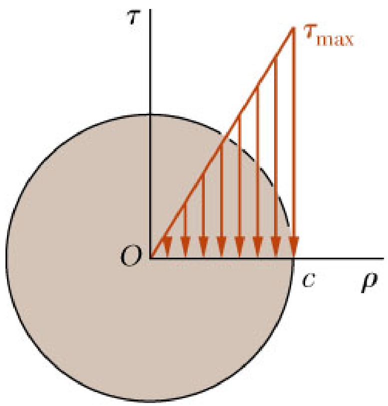
- 위의 관계로부터

$$L\gamma = \rho\phi \quad \text{or} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

- 전단 변형률은 비틀림과 반지름에 비례

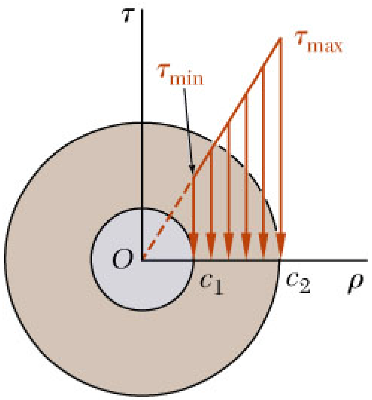
$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max}$$

탄성영역내의 응력(Stresses in Elastic Range)



(a)

$$J = \frac{1}{2}\pi c^4$$



(b)

$$J = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right)$$

- 위의 관계식에 전단 탄성계수를 곱하면,

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

훅 법칙으로부터 $\tau = G\gamma$, 그러므로

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\max}$$

축의 전단응력이 축심으로부터 에 따라 선형적으로 변화

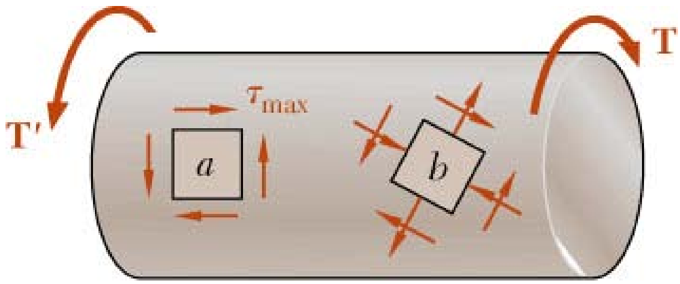
- 축단면에 작용한 모멘트의 합은 축에 작용한 토크 T와 같아야 한다는 결과로부터,

$$T = \int \rho\tau\, dA = \frac{\tau_{\max}}{c}\int \rho^2\, dA = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

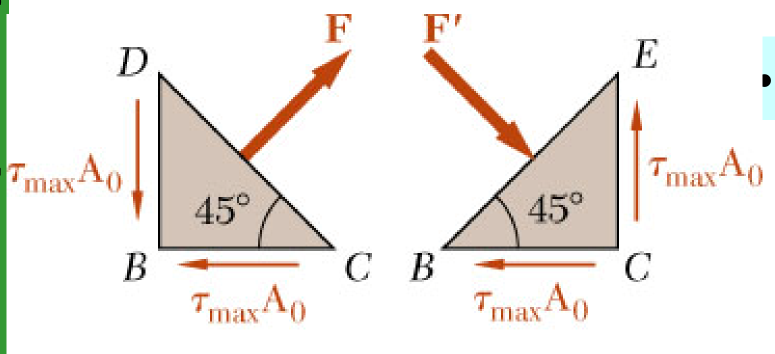
- 탄성비틀림공식(*elastic torsion formulas*)

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

수직응력 (Normal Stresses)



- 면에 평행하고 축선에 직각인 요소 a 는 단지 전단응력만 존재. 축선과 임의 각을 이루는 요소 *b*의 변은 수직응력과 전단응력을 동시에 받음.



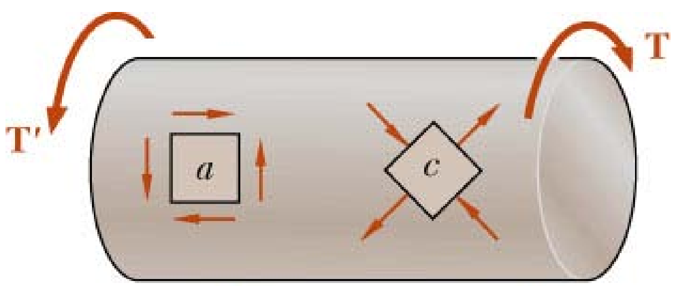
(*a*) (*b*)

- 축선과 45°를 이루는 요소

$$F = 2(\tau_{max} A_0)\cos 45° = \tau_{max} A_0 \sqrt{2}$$

$$\sigma_{45^o} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{max}$$

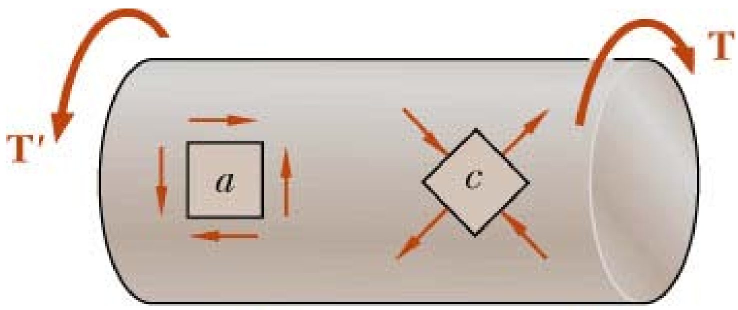
- 요소 *a* 는 순수전단
- 요소 *c* 는 두면에 인장응력, 다른 두면에 압축응력을 받음.



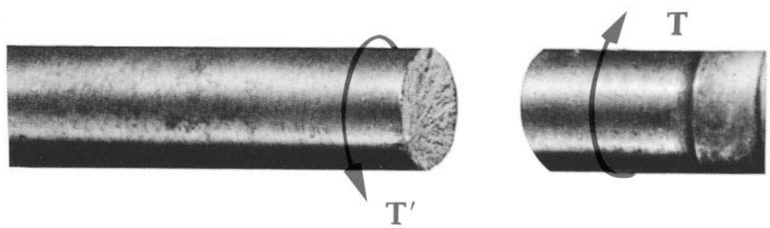
$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$ $\sigma_{45°} = \pm\frac{Tc}{J}$

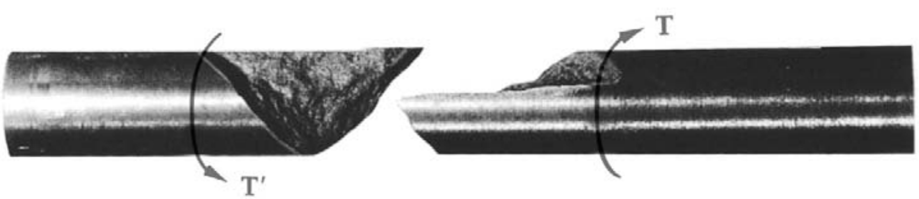
- 이 요소들에 생기는 모든 응력은 같은 크기 *Tc/J*를 갖는다.

비틀림 파손형태(Torsional Failure Modes)



$\tau_{max} = \dfrac{Tc}{J}$ $\quad$ $\sigma_{45^\circ} = \pm \dfrac{Tc}{J}$



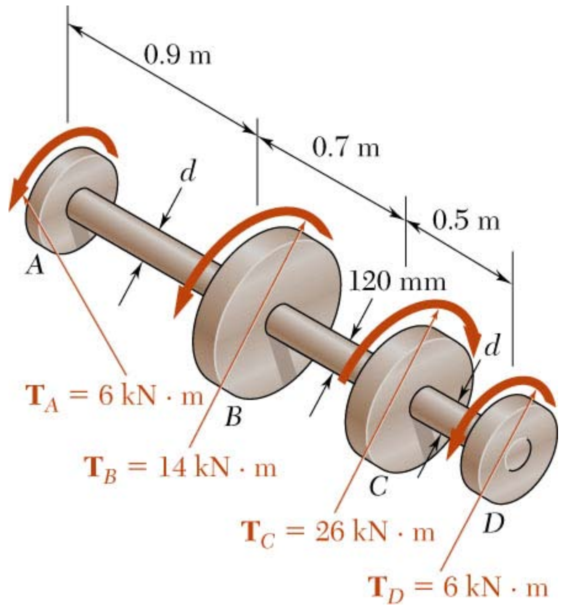


- 연성재료는 일반적으로 전단응력에 의해서 파손. 취성재료로 만든 시험편은 인장응력이 최대가 되는 방향에 수직한 면을 따라 파단

- 연성재료로 만든 시험편이 비틀림을 받으면 그 시험편은 축선에 수직한 면에 따라 파단(break)

- 취성재료로 만든 시험편은 인장응력이 최대가 되는 방향에 수직한 면을 따라 파단되려고 한다. 즉, 시험편의 축선과 45°를 이루는 면으로 파단.

견본문제 3.1 (Sample Problem 3.1)



축 *BC*는 안지름 90 mm, 바깥지름 120 mm인 중공축이며 축 *AB*와 *CD*는 지름 *d*인 중실축이다. 그림과 같은 하중을 받을 때 다음을 구하여라. (*a*) 축 *BC*에서의 최대 및 최소전단응력, (*b*) 축의 허용전단응력이 65 MPa일 때 축 *AB*와 *CD*의 필요한 지름.

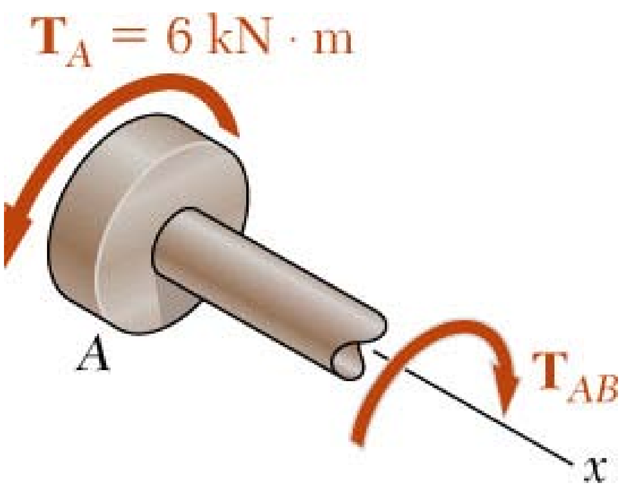
풀이:

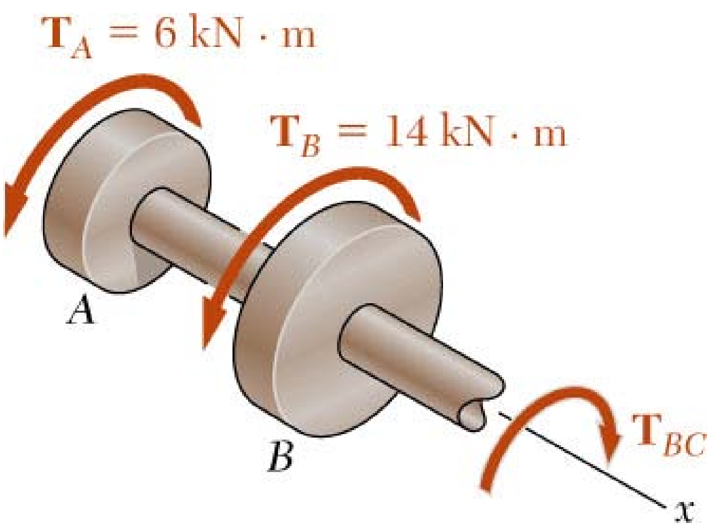
- 축 AB와 BC사이의 단면을 절다, 이들 구간에 대한 평형식으로부터 비틀림 하중을 계산.
- 탄성 비틀림 공식을 적용하여 축 BC의 최대 및 최소응력을 구한다.
- 주어진 허용전단응력과 가해진 토크로부터, 탄성비틀림 공식을 이용하여 필요로 하는 지름을 계산.

견본문제 3.1 (Sample Problem 3.1)

풀이:

- 축 AB와 BC사이의 단면을 절다, 이들 구간에 대한 평형식으로부터 비틀림 하중을 계산.





$$\sum M_x = 0 = (6\,\mathrm{kN\cdot m}) - T_{AB}$$

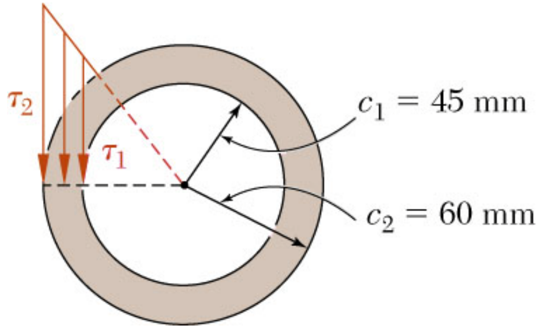
$$T_{AB} = 6\,\mathrm{kN\cdot m} = T_{CD}$$

$$\sum M_x = 0 = (6\,\mathrm{kN\cdot m}) + (14\,\mathrm{kN\cdot m}) - T_{BC}$$

$$T_{BC} = 20\,\mathrm{kN\cdot m}$$

견본문제 (Sample Problem 3.1)

- 탄성 비틀림 공식을 적용하여 축 BC의 최대 및 최소응력을 계산



$$J = \frac{\pi}{2}\left(c_2^4 - c_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left[(0.060)^4 - (0.045)^4\right]$$

$$= 13.92\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{T_{BC}c_2}{J} = \frac{(20\,\mathrm{kN\cdot m})(0.060\,\mathrm{m})}{13.92\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4}$$

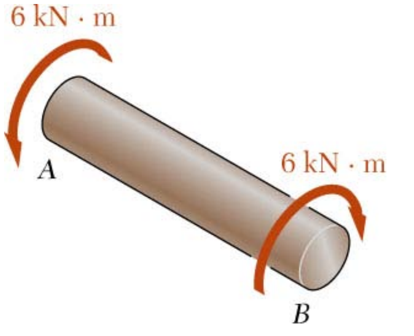
$$= 86.2\,\mathrm{MPa}$$

$$\frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \frac{\tau_{min}}{86.2\,\mathrm{MPa}} = \frac{45\,\mathrm{mm}}{60\,\mathrm{mm}}$$

$$\tau_{min} = 64.7\,\mathrm{MPa}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tau_{max} &= 86.2\,\mathrm{MPa}\\ \tau_{min} &= 64.7\,\mathrm{MPa}\end{aligned}}$$

- 주어진 허용전단응력과 가해진 토크로부터, 탄성비틀림 공식을 이용하여 필요로 하는 지름을 계산.

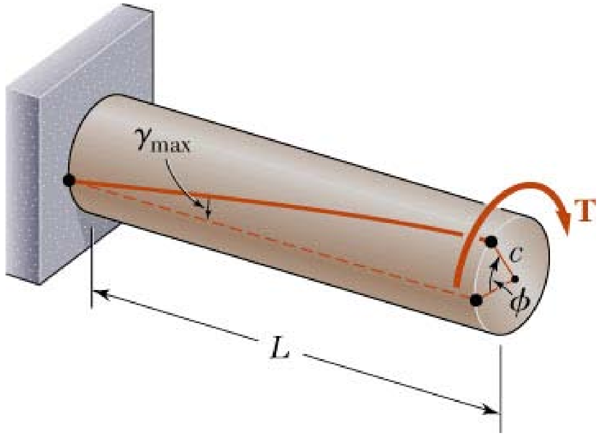


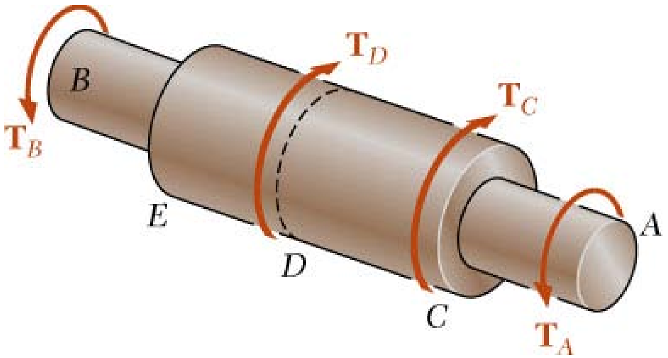
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{\frac{\pi}{2}c^4} \qquad 65MPa = \frac{6\,\mathrm{kN\cdot m}}{\frac{\pi}{2}c^3}$$

$$c = 38.9\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{d = 2c = 77.8\,\mathrm{mm}}$$

탄성한계 내에서 비틀림각(Angle of Twist in Elastic Range)





- 비틀림각과 최대전단변형률 사이의 관계로부터,

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

- 탄성한계 내에서는 훅 법칙을 적용하면,

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

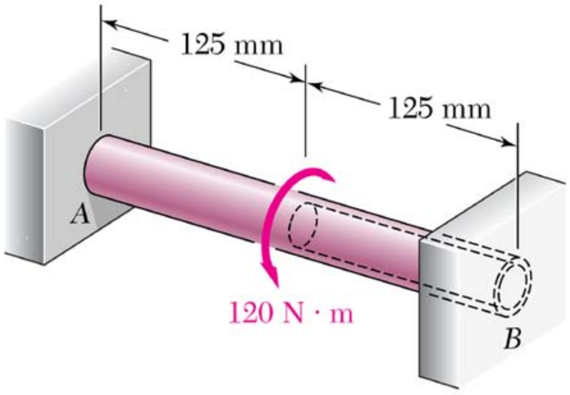
- 전단 변형률에 관한 식을 등식으로 놓고 비틀림각에 대해서 풀면,

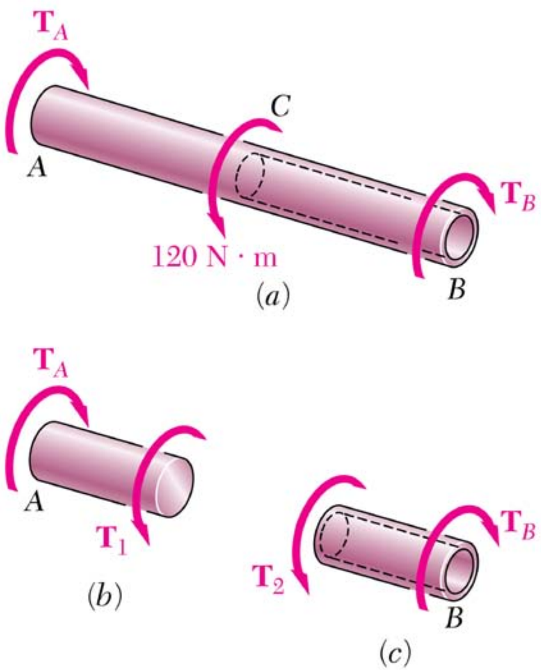
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

- 축 단면이 균일하지 않거나 혹은 몇 가지의 다른 재료로 만들어진 축일 경우, 동일한 조건의 몇 구간으로 나누어서 전체 비틀림각을 계산.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

부정정 축 (Statically Indeterminate Shafts)





- 주어진 축 칫수와 가해진 토크로부터 A와 B에서 반력 토크를 계산.
- 축의 자유물체도로부터

$$T_A + T_B = 120\,\mathrm{N \cdot m}$$

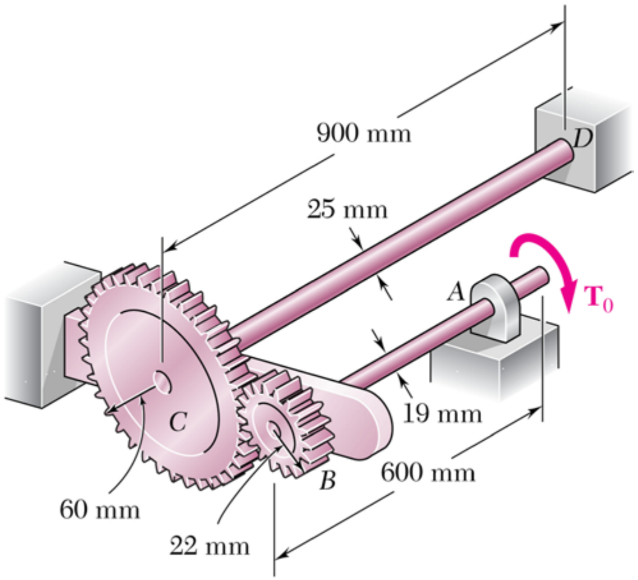
- 위의 식으로 두 값을 계산할 수 없으므로 이 문제는 부정정(statically indeterminate).
- *AC*부와 *CB*부가 서로 반대방향으로 같이 비틀어지므로,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \qquad T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

- 본래의 평형방정식에 대입하면,

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 120\,\mathrm{N \cdot m}$$

견본문제 3.4 (Sample Problem 3.4)



두 개의 강재 중실축이 기어로 연결, 각 축의 G = 77 Gpa, 허용 전단응력은 55 Mpa. 다음 사항을 계산. (a)축 AB의 끝단 A에 작용할 수 있는 최대토크 $\mathbf{T}_0$, (b)축 AB의 끝단 A가 회전할 수 있는 회전각

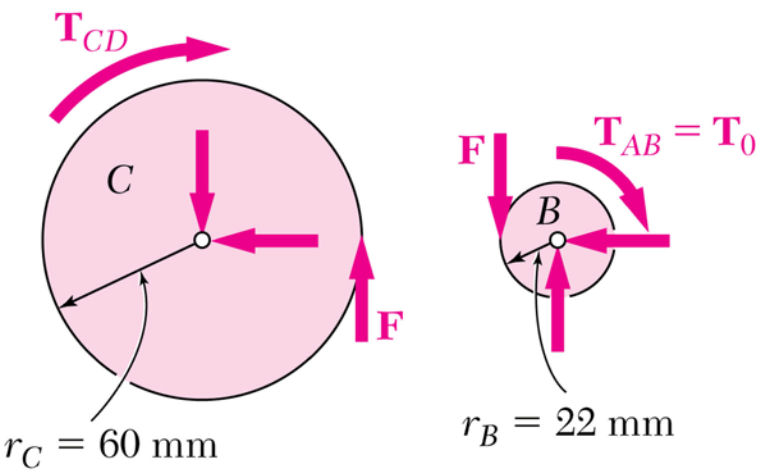
풀이:

- 두 개의 축에 평형 방정식으로부터 T_{CD} 와 T_0 의 관계식을 구한다.
- 운동학(kinematic)으로부터 기어의 원주운동 관계식을 세운다.
- 각 축에서 최대 허용토크를 구한 후, 작은 값을 선택.
- 각 축에서 상응하는 비틀림각과 끝단 A의 비틀림각 계산.

Sample Problem 3.4

풀이:

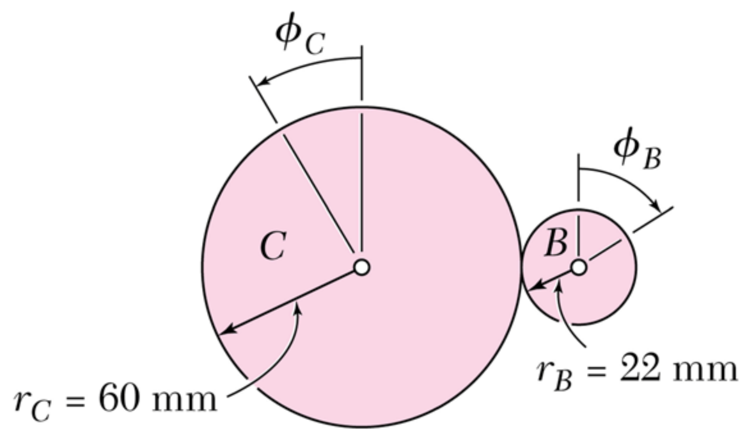
- 두 개의 축에 평형 방정식으로부터 T_{CD} 와 T_0 의 관계식을 구한다.
- 운동학(kinematic)으로부터 기어의 원주운동 관계식을 세운다.



$$\sum M_B = 0 = F(22\,\text{mm}) - T_0$$

$$\sum M_C = 0 = F(60\,\text{mm}) - T_{CD}$$

$$T_{CD} = 2.73 T_0$$



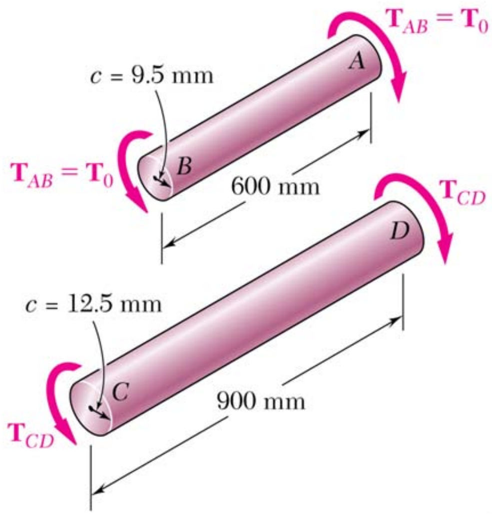
$$r_B \phi_B = r_C \phi_C$$

$$\phi_B = \frac{r_C}{r_B}\phi_C = \frac{60\,\text{mm}}{20\,\text{mm}}\phi_C$$

$$\phi_B = 2.73\phi_C$$

견본문제 3.4 (Sample Problem 3.4)

- 각 축에서 최대 허용토크를 구한 후, 작은 값을 선택.



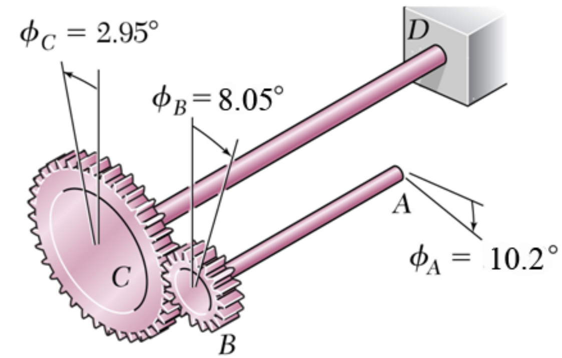
$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB}c}{J_{AB}} \qquad 55\times10^{6}\,\mathrm{Pa} = \frac{T_0\left(9.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(9.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^4}$$

$$T_0 = 74.1\,\mathrm{Nm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{CD}c}{J_{CD}} \qquad 55\times10^{6}\,\mathrm{Pa} = \frac{2.8T_0\left(12.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(12.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^4}$$

$$T_0 = 61.8\,\mathrm{Nm} \qquad \boxed{T_0 = 61.8\,\mathrm{Nm}}$$

- 각 축에서 상응하는 비틀림각과 끝단 A의 비틀림각 계산.



$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{J_{AB}G} = \frac{(61.8\,\mathrm{Nm})(0.6\,\mathrm{m})}{\frac{\pi}{2}(0.0095\,\mathrm{m})^4\left(77\times10^{9}\,\mathrm{Pa}\right)}$$

$$= 0.0376\,\mathrm{rad} = 2.15^{\circ}$$

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{J_{CD}G} = \frac{2.73(61.8\,\mathrm{Nm})(0.6\,\mathrm{m})}{\frac{\pi}{2}(0.0125\,\mathrm{m})^4\left(77\times10^{9}\,\mathrm{psi}\right)}$$

$$= 0.0514\,\mathrm{rad} = 2.95^{\circ}$$

$$\phi_B = 2.73\phi_C = 2.73\left(2.95^{\circ}\right) = 8.05^{\circ}$$

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.05^{\circ} + 2.15^{\circ} \qquad \boxed{\phi_A = 10.2^{\circ}}$$