전동축 설계 (Design of Transmission Shafts)

- 전동축의 설계에서 필요한 주요 명세사항:
  - 동력
  - 축의 회전속도

- 설계자의 역할은 축이 특정한 속도에서 필요한 동력을 전달할 때 재료가 허용할 수 있는 최대전단응력을 넘지 않도록 축의 재료를 선정하고 축의 단면의 치수를 결정

- 토크 T를 받으면 의 각속도 ω로 회전하는 강체가 발생시킬 수 있는 동력

$$P = T\omega = 2\pi f T$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$$

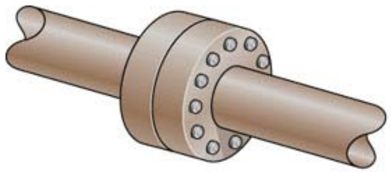
- 최대 허용 전단응력을 초과하지 않은 축의 단면 치수 계산.

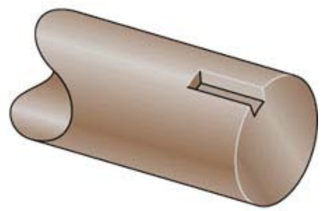
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}c^3 = \frac{T}{\tau_{max}} \quad (\text{solid shafts})$$

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2}\left(c_2^4 - c_1^4\right) = \frac{T}{\tau_{max}} \quad (\text{hollow shafts})$$

응력 집중 (Stress Concentrations)





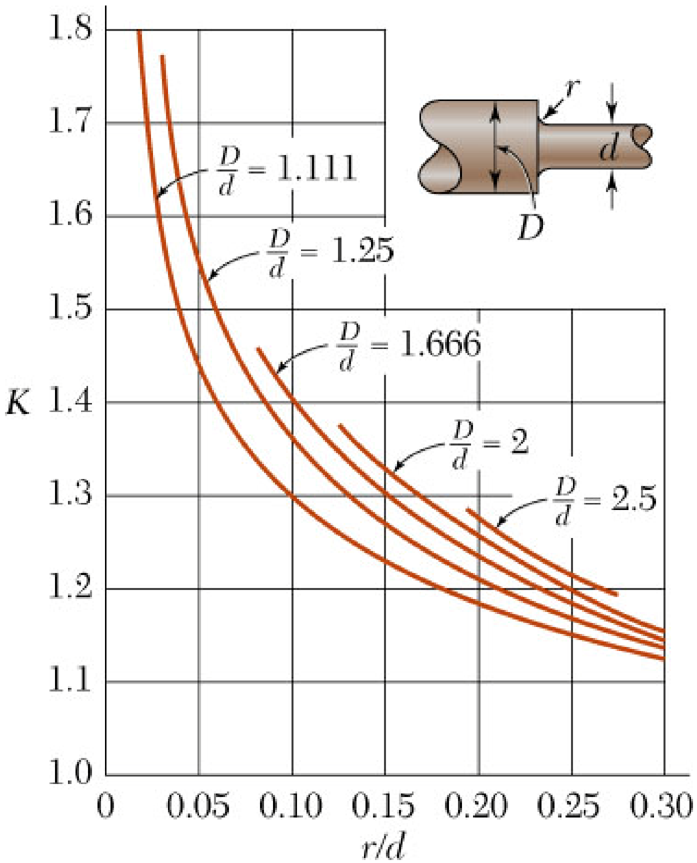


Fig. 3.32 Stress-concentration factors for fillets in circular shafts.

- 비틀림 공식으로부터,

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

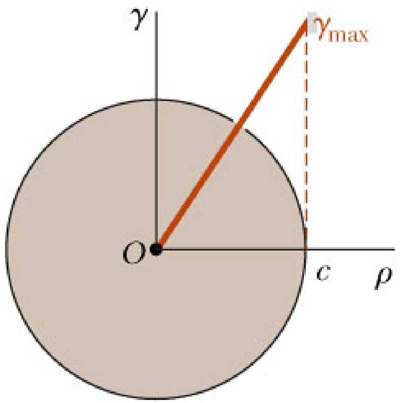
- 이 경우에는 축의 양단에 부착된 강체판에 토크가 작용되었다고 가정

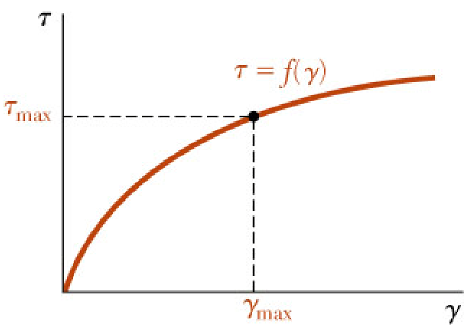
- 플랜지 커플링을 통하거나 키홈(keyway)과 키로 연결한 기어에 의해 축에 작용할 경우 응력집중이 발생.

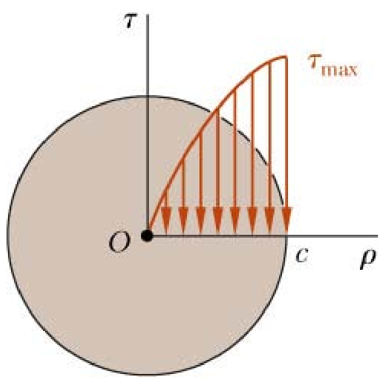
- 실험이나 수치 해석 법에 의해

$$\tau_{\max} = K\frac{Tc}{J}$$

소성변형 (Plastic Deformations)





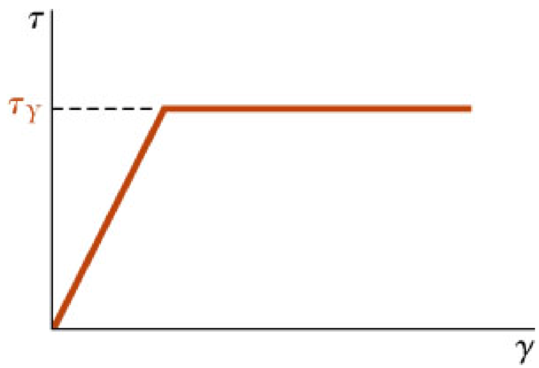


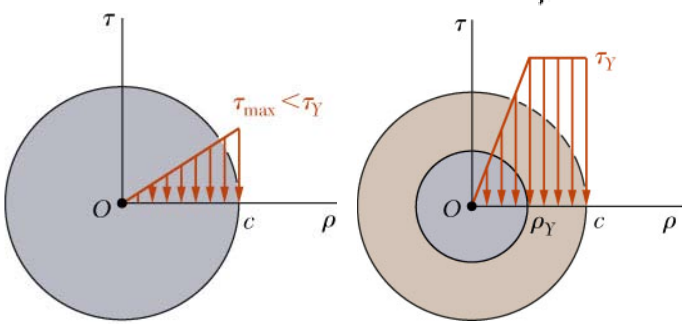
- 선형 탄성재료라고 가정할 경우,

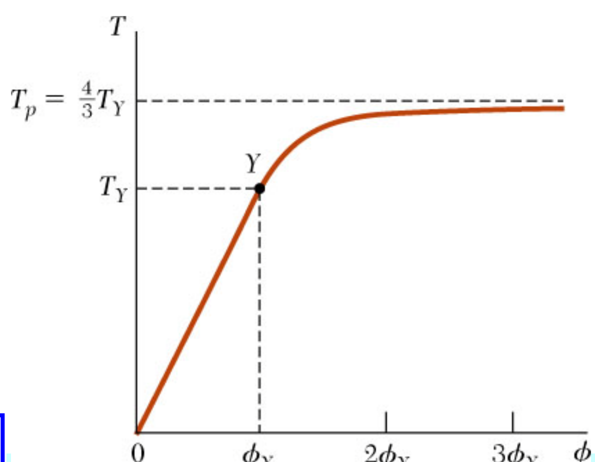
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

- 축의 어느 부분에서의 응력이 항복강도를 넘거나 사용재료가 비선형 전단응력 – 변형률 관계일 경우, 위 관계식은 유용하지 않음.
- 전단변형률은 재료 특성에 관계없이 선형적으로 변화할 경우, 전단 응력-변형률 관계로부터 응력분포를 계산.
- 내부 응력에 의한 모멘트 적분 값은 축 단면의 토크와 동일

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi\int_0^c \rho^2\tau\, d\rho$$







- 최대 탄성 토크(*maximum elastic torque*)

$$T_Y = \frac{J}{c}\tau_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \qquad \phi_Y = \frac{L\gamma_Y}{c}$$

- 토크를 증가하면 소성영역이 탄성코어(elastic core) 주위로 증가

$$\tau = \tau_Y \rightarrow \tau = \frac{\rho}{\rho_Y}\tau_Y$$

$$\rho_Y = \frac{L\gamma_Y}{\phi}$$

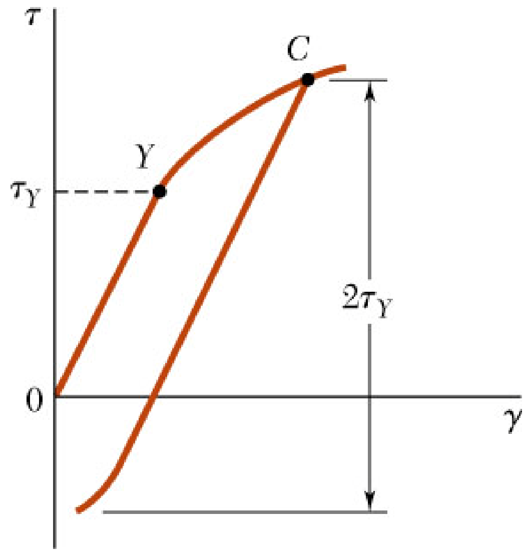
$$T = \tfrac{2}{3}\pi c^3 \tau_Y \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) = \tfrac{4}{3} T_Y \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right)$$

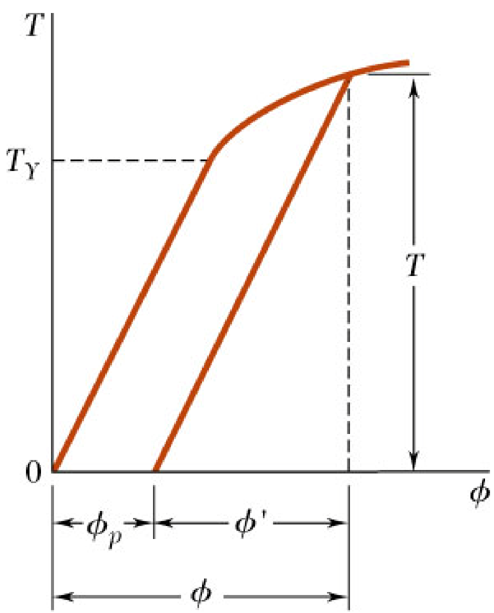
$$T = \tfrac{4}{3} T_Y \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right)$$

- As $\rho_Y \rightarrow 0,$ 토크는 한계치에 도달

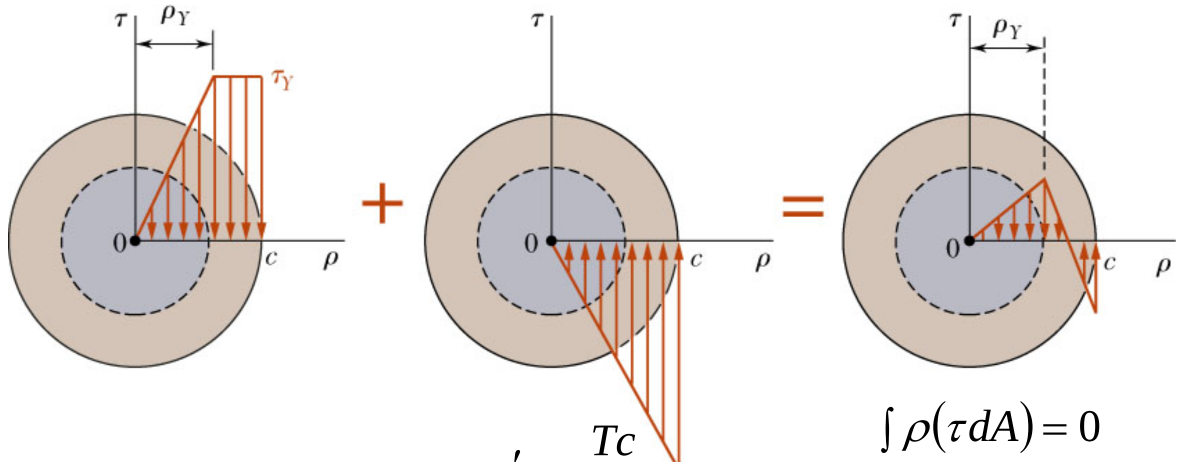
$$T_P = \tfrac{4}{3} T_Y = \textit{plastic torque}$$

잔류응력 (Residual Stresses)





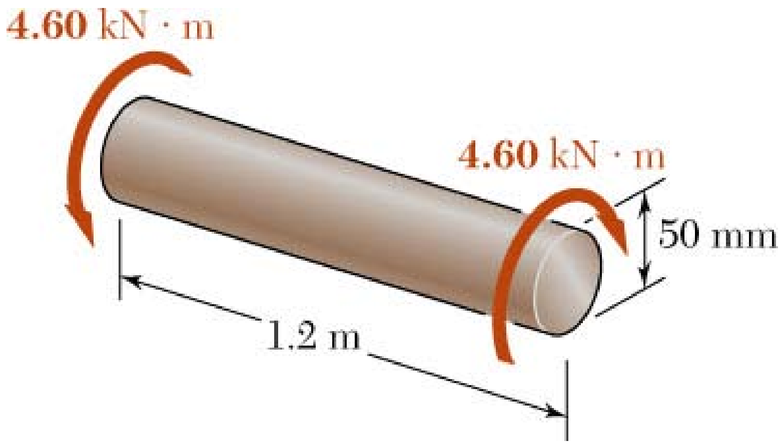
- 축이 큰 토크를 받으면 소성영역이 발생
- 토크가 제거되면 각 지점의 응력이나 변형률은 일반적으로 0 이 아닌 잔류응력까지 직선을 따라 감소가 됨.
- 무부하 상태에서는 $T-\phi$ 선도가 0 보다 더 큰 각도까지 직선을 따라 감소.
- 잔류응력은 겹침의 원리를 적용하여 구한다.



$$\tau'_m = \frac{Tc}{J}$$

$$\int \rho(\tau dA) = 0$$

Example 3.08/3.09



길이 1.2 m, 지름 50 mm인 중실원형축이 그림과 같이 양단에서 4.60 kN · m의 토크를 받는다. 이 축의 전단항복강도가 150 MPa이고 강성계수 G = 77 GPa이다. (*a*) 탄성반지름, (*b*) 축의 비틀림각은 얼마인가?

토크가 제거될 경우, (c) 영구 비틀림 각, (d) 잔류응력 분포를 결정하라.

풀이:

- 식 (3.32)로부터 ρ_Y/c 에 대해 구하고, 탄성코어 (elastic core) 반지름을 계산
- 식 (3.36)을 이용, 비틀림 각을 계산
- 식 (3.16)을 이용, 토크가 제거될 때 축의 비틀림 각을 구한다. 영구 비틀림은 비틀림 각과 비틀리지 각의 차이이다.
- 축의 비틀림(twisting)과 비틀리지 않은(untwisting) 응력을 겹쳐(superposition), 잔류응력 분포를 구한다.

Example 3.08/3.09

풀이:

- 식 (3.32)로부터 ρ_Y/c 에 대해 구하고, 탄성코어 (elastic core) 반지름을 계산

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1-\frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \Rightarrow \frac{\rho_Y}{c} = \left(4-3\frac{T}{T_Y}\right)^{1/3}$$

$$J = \frac{1}{2}\pi c^4 = \frac{1}{2}\pi\left(25\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)$$

$$= 614\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

$$\tau_Y = \frac{T_Y c}{J} \Rightarrow T_Y = \frac{\tau_Y J}{c}$$

$$T_Y = \frac{\left(150\times10^6\,\mathrm{Pa}\right)\left(614\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4\right)}{25\times10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= 3.68\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = \left(4-3\frac{4.6}{3.68}\right)^{1/3} = 0.630$$

$$\boxed{\rho_Y = 15.8\,\mathrm{mm}}$$

- 식 (3.36)을 이용, 비틀림 각을 계산

$$\frac{\phi}{\phi_Y} = \frac{\rho_Y}{c} \Rightarrow \phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c}$$

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{\left(3.68\times10^3\,\mathrm{N\cdot m}\right)(1.2\,\mathrm{m})}{\left(614\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4\right)(77\times10\,\mathrm{Pa})}$$

$$\phi_Y = 93.4\times10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

$$\phi = \frac{93.4\times10^{-3}\,\mathrm{rad}}{0.630} = 148.3\times10^{-3}\,\mathrm{rad} = 8.50^{\mathrm{o}}$$

$$\boxed{\phi = 8.50^{\mathrm{o}}}$$

예제 3.08/09 (Example 3.08/3.09)

- 식 (3.16)을 이용, 토크가 제거될 때 축의 비틀림 각을 계산. 영구 비틀림은 비틀림 각과 비틀리지 각의 차이

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.6\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m})(1.2\,\mathrm{m})}{(6.14\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4)(77\times10^{9}\,\mathrm{Pa})}$$

$$= 116.8\times10^{-3}\,\mathrm{rad} = 6.69^\circ$$

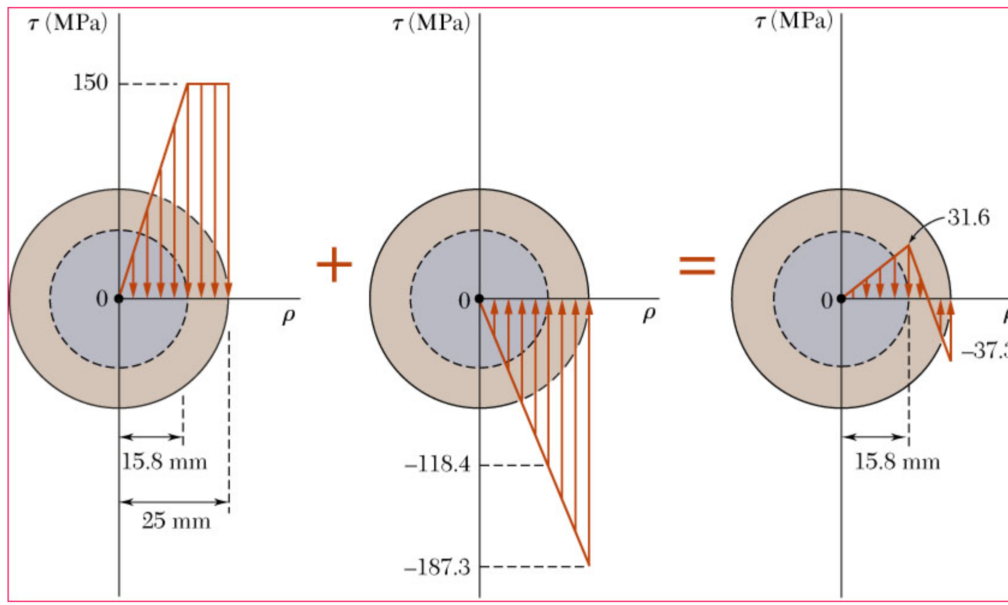
$$\varphi_p = \phi - \phi' = 8.50^\circ - 6.69^\circ = 1.81^o$$

$$\boxed{\phi_p = 1.81^o}$$

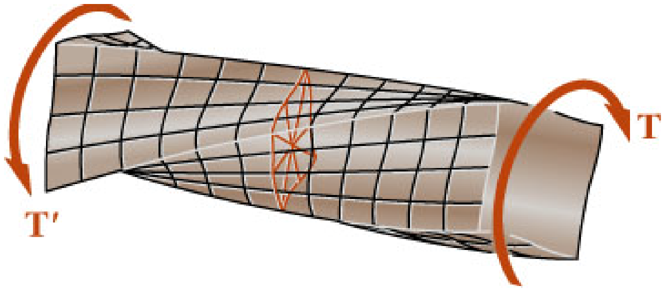
- 축의 비틀림(twisting)과 비틀리지 않은(untwisting) 응력을 겹쳐(superposition), 잔류응력 분포 계산

$$\tau'_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.6\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m})(25\times10^{-3}\,\mathrm{m})}{614\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4}$$

$$= 187.3\,\mathrm{MPa}$$



비원형 부재의 비틀림 (Torsion of Noncircular Members)



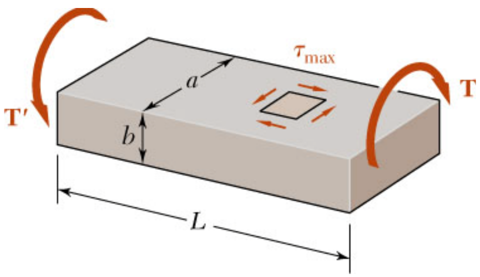
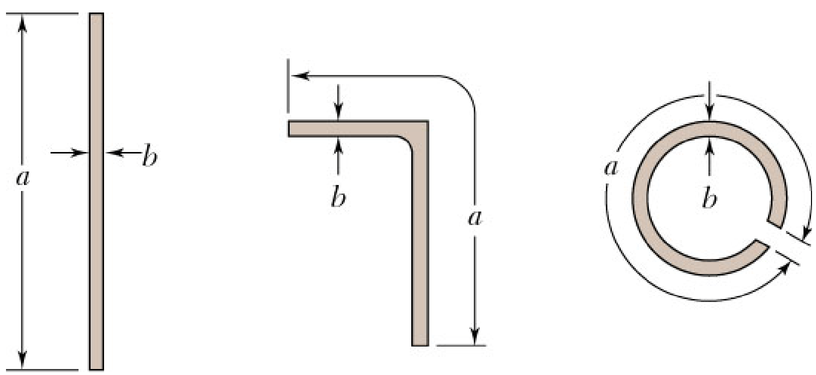


TABLE 3.1. **Coefficients for Rectangular Bars in Torsion**

a/b	c_1	c_2
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

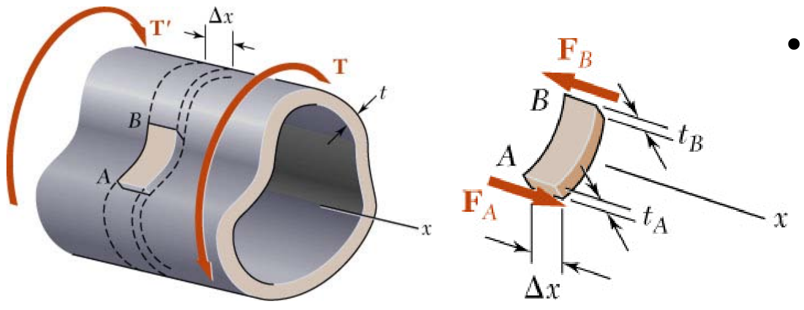


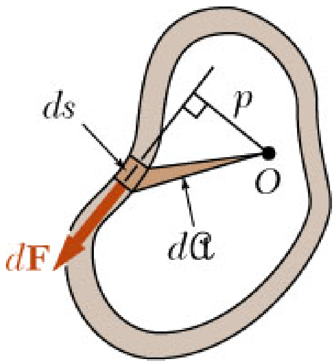
- 앞의 비틀림 공식은 축대칭 또는 원형 단면축에 유효함.
- 비원형 단면 봉이 비틀어질 경우, 단면은 그대로 있지 않으며 응력과 변형률 분포는 선형으로 변화되지 않음.
- 균일한 직사각형 단면 봉에 대해서,

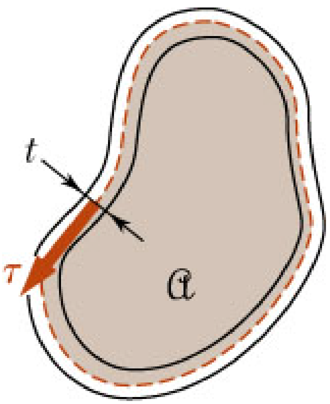
$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2} \qquad \phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G}$$

- *a/b*의 값이 아주 클 경우, 다른 열린 구간 단면에 대한 비틀림 각과 최대전단응력은 직사각형 단면 봉과 동일한 크기를 갖는다.

얇은 벽의 중공축 (Thin-Walled Hollow Shafts)







- AB 에서 x-방향 힘의 합은,

$$\sum F_x = 0 = \tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x)$$

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = q = \text{shear flow}$$

전단응력은 두께에 반비례한다.

- 축에 작용하는 토크는 전단응력에 기인한 모멘트 적분으로 계산

$$dM_0 = p\,dF = p\tau(t\,ds) = q(pds) = 2q\,dA$$

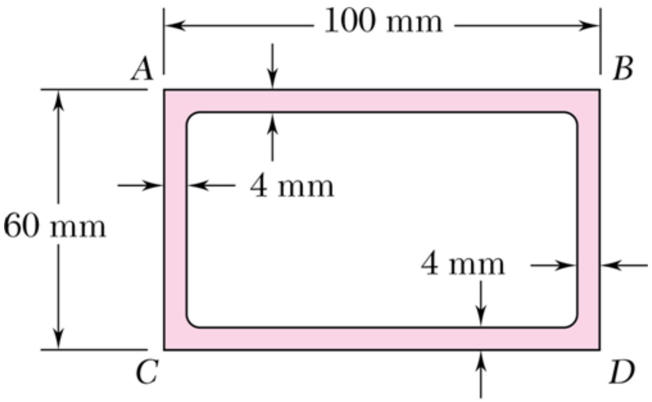
$$T = \oint dM_0 = \oint 2q\,dA = 2qA$$

$$\tau = \frac{T}{2tA}$$

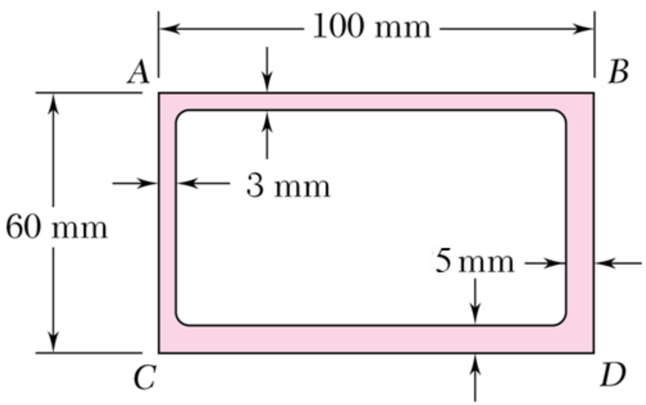
- 비틀림각 (11장 참고)

$$\phi = \frac{TL}{4A^2G}\oint\frac{ds}{t}$$

예제 3.10 (Example 3.10)



(a)



(b)

60 x 100 mm 직사각형 단면을 갖는 구조용 알루미늄 압출 환형관이 2.7 kN . m 의 토크를 받는다. 아래의 경우, 네 개의 벽 각각에 대한 전단응력을 구하라. (*a*) 벽두께가 균일하게 4 mm일 경우, (*b*) 압출불량으로 벽 *AB*와 *AC*두께는 3 mm 이고, 벽 *BD*와 *CD* 두께는 5 mm일 경우.

풀이:

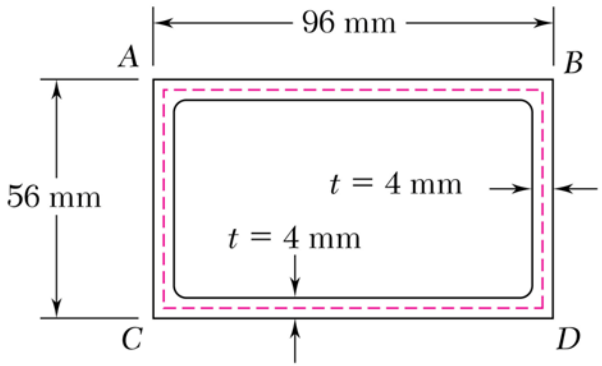
- 튜브 벽의 전단흐름을 결정한다.

- 각각의 벽 두께에 상응하는 전단응력을 구한다.

예제 (Example 3.10)

- 풀이:

  튜브 벽의 전단흐름을 결정.



$$A = (96\,\mathrm{mm})(56\,\mathrm{mm}) = 5376\,\mathrm{mm}^2$$

$$q = \frac{T}{2A} = \frac{2700\,\mathrm{Nm}}{2\left(5376\times10^{-6}\,\mathrm{mm}^2\right)} = 251.12\times10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

- 각각의 벽 두께에 상응하는 전단응력을 구한다.

(a) 균일한 벽 두께에 대해서는,

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{251.12\times10^3\,\mathrm{N/m}}{0.004\,\mathrm{m}}$$

$$\boxed{\tau = 62.8\,\mathrm{MPa}}$$

(b) 벽 두께가 다를 경우

$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{251.12\times10^3\,\mathrm{N/m}}{0.003\,\mathrm{m}}$$

$$\boxed{\tau_{AB} = \tau_{BC} = 83.7\,\mathrm{MPa}}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{251.12\times10^3\,\mathrm{N/m}}{0.005\,\mathrm{m}}$$

$$\boxed{\tau_{BC} = \tau_{CD} = 50.2\,\mathrm{MPa}}$$