Fifth SI Edition

CHAPTER

10

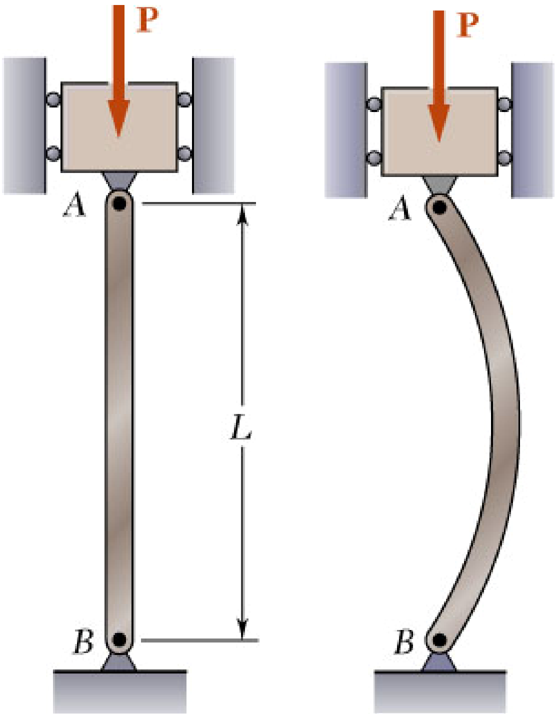
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

기둥
Columns

목차 (Contents)

구조물의 안정 (Stability of Structures)



- 기둥설계에서 단면적은 다음 조건이 만족하여야 한다.
  - 응력이 허용응력보다 작아야 한다.

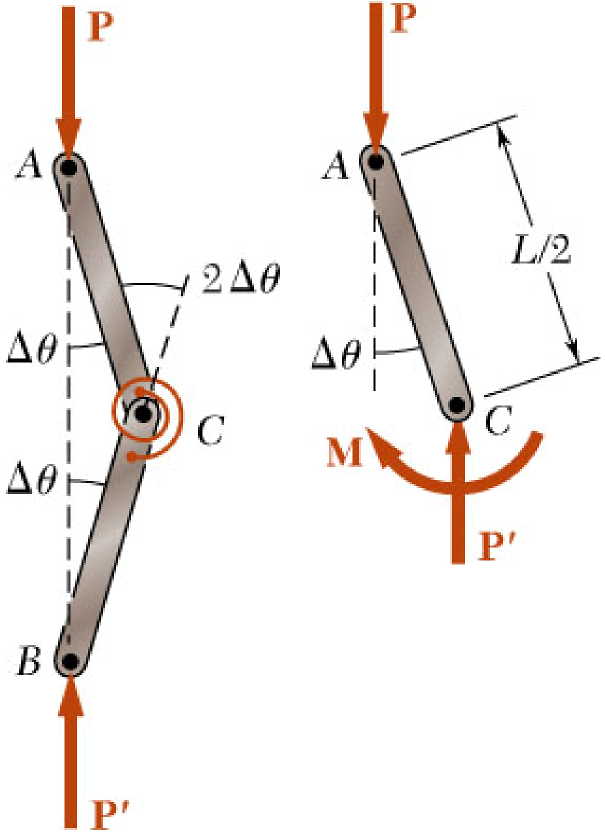
$$\sigma = \frac{P}{A} \le \sigma_{all}$$

  - 변형이 규정 값보다 작아야 한다.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \le \delta_{spec}$$

- 위의 조건이 만족되록 설계되었다 하더라도 기둥이 불안정하게 되어 갑자기 휘거나 좌굴(buckle)을 일으킬 수 있다.

구조물의 안정 (Stability of Structures)



- 두 개의 봉과 비틀림 스프링으로 구성된 모델에서, 작은 변위 또는 교란(perturbation)이 일어날 경우,

$$K(2\Delta\theta) = \text{restoring moment}$$

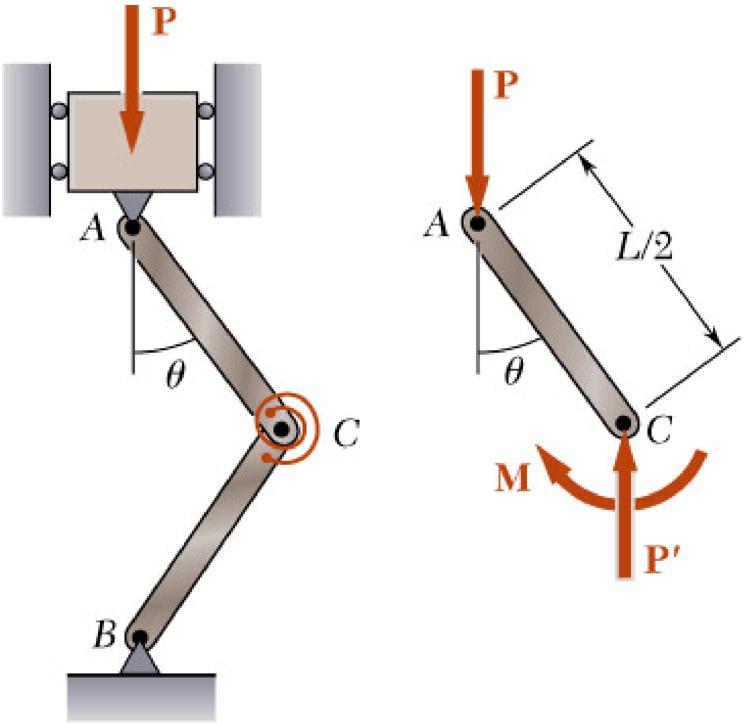
$$P\frac{L}{2}\sin\Delta\theta = P\frac{L}{2}\Delta\theta = \text{destabilizing moment}$$

- 다음 조건이 만족될 경우, 기둥은 안정 (원래의 위치로 복귀하려는 경향)

$$P\frac{L}{2}\Delta\theta < K(2\Delta\theta)$$

$$P < P_{cr} = \frac{4K}{L}$$

구조물의 안정 (Stability of Structures)

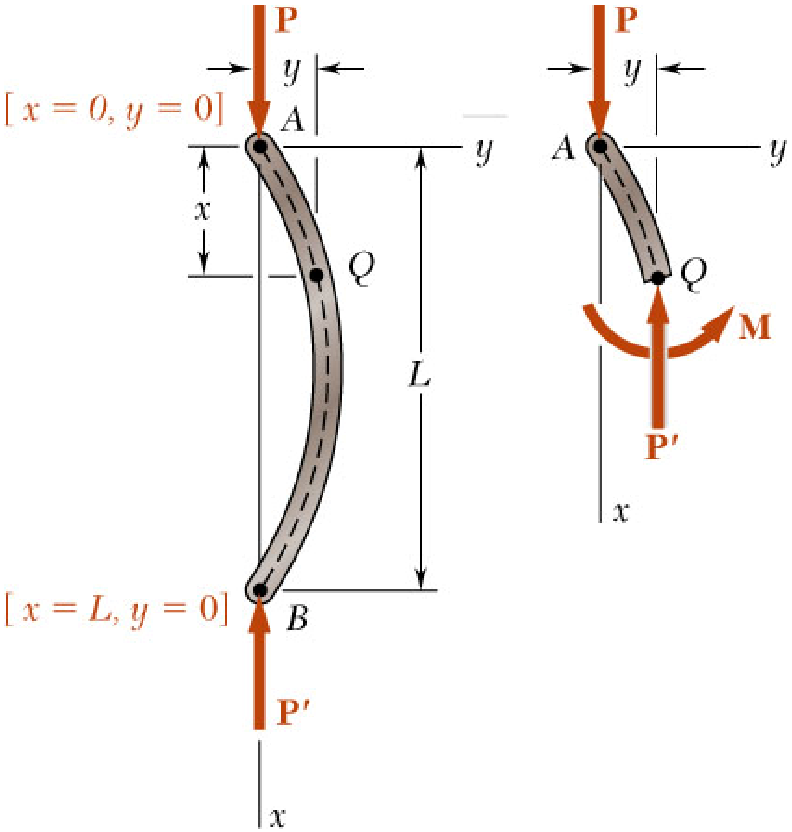


- 하중 P 가 가해질 경우, 구조시스템은 약간 교란(perturbation)이 일어난 후 어느 휨각(deflection angle)에서 평형위치에 도달

$$P\frac{L}{2}\sin\theta = K(2\theta)$$

$$\frac{PL}{4K} = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\theta}{\sin\theta}$$

- 단, $sin\theta < \theta$ 일 경우에 $P > P_{cr}$ 에 적합한 상황이 발생



- 축방향 하중을 받는 기둥을 고려. 약간의 교란이 일어난 후, 시스템은 평형위치에 도달하여 다음 식을 만족

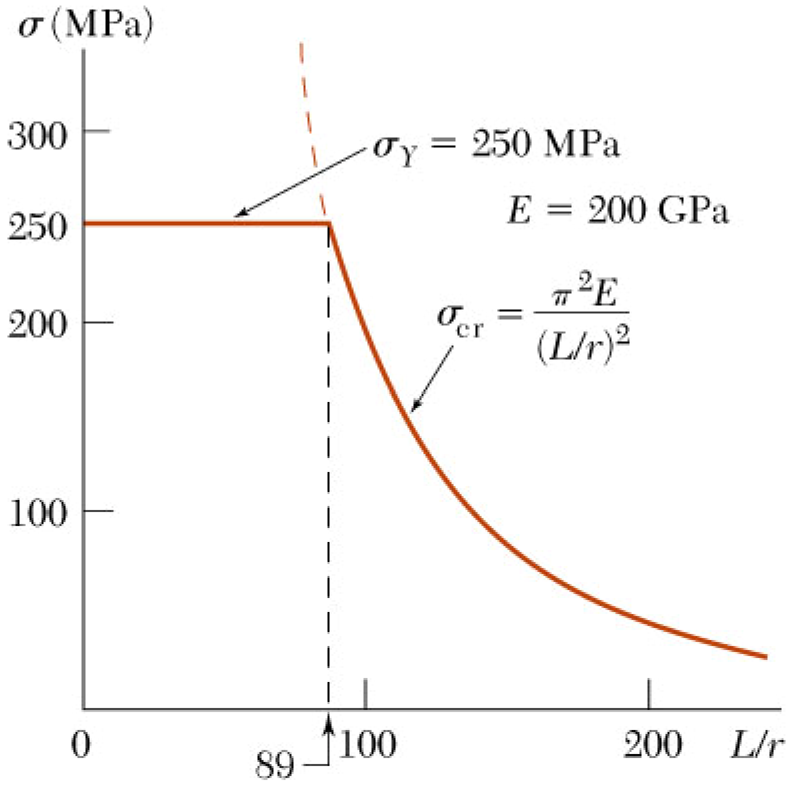
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

- 위 식의 풀이로부터,

$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E\left(Ar^2\right)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$



- 임계하중(critical load)에 상응하는 응력

$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

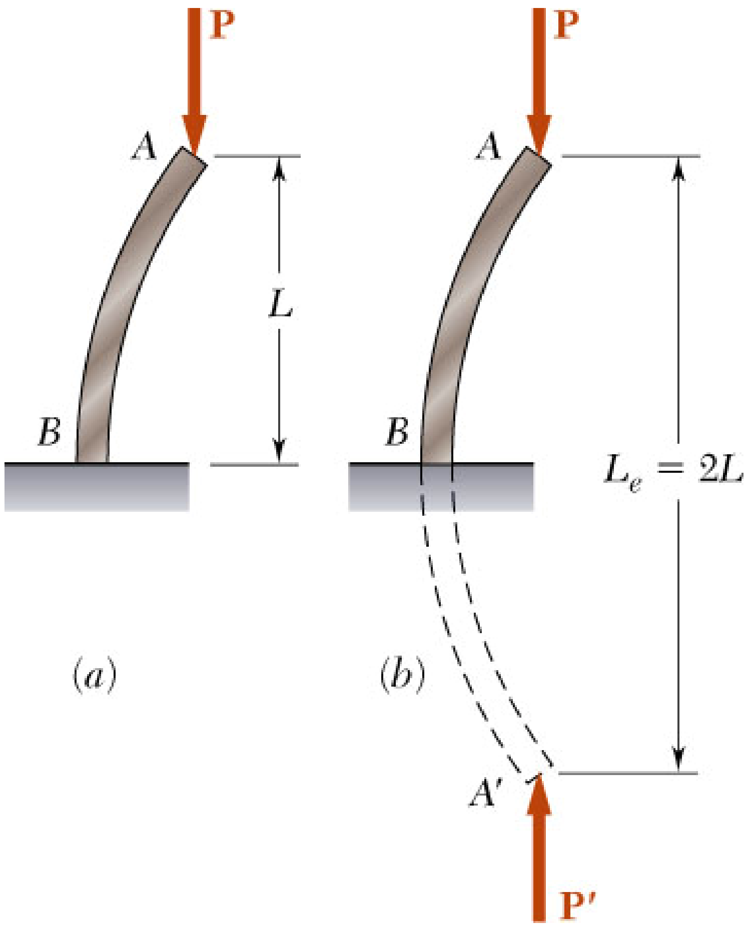
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E\left(Ar^2\right)}{L^2 A}$$

$$= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = critical\ stress$$

$$\frac{L}{r} = slenderness\ ratio$$

- 위 해석법은 중심축 하중을 받는 경우에만 해당된다.

오일러 공식의 확장 (Extension of Euler's Formula)



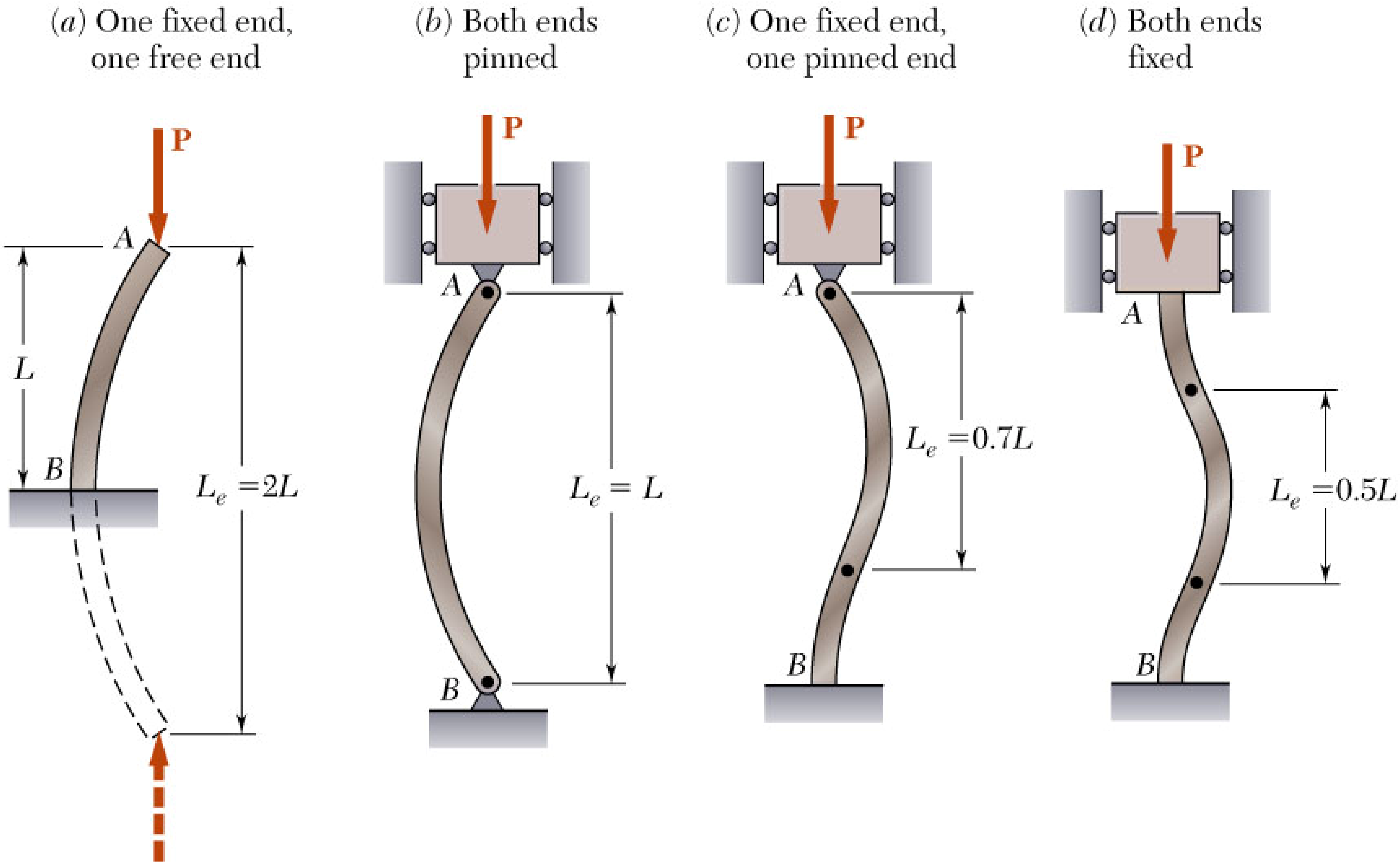
- 한 단이 고정된 기둥의 자유단에 하중이 작용할 경우, 핀지지 기둥의 상반부(upper-half)와 같이 거동
- 오일러 공식으로부터 임계하중은,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

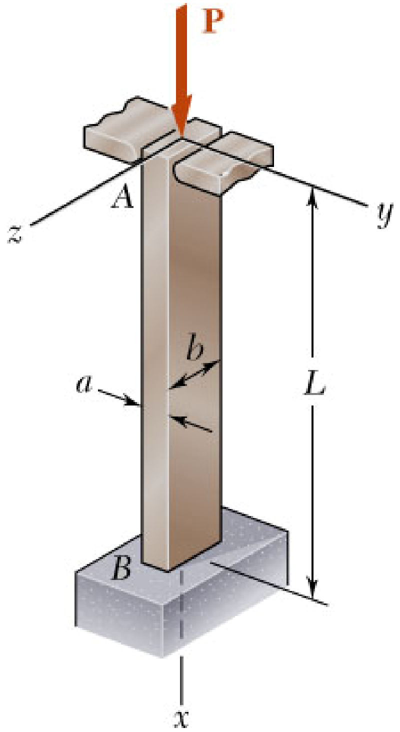
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$$

$$L_e = 2L = \text{equivalent length}$$

오일러 공식 (Extension of Euler's Formula)



견본문제 10.1 (Sample Problem 10.1)



$L = 0.5$ m

$E = 70$ GPa

$P = 20$ kN

$FS = 2.5$

길이 L이고 직사각형 단면의 알루미늄 기둥이 B단에 고정되고 A단에 중심 축하중을 받고 있다. 두 개의 원활한 고정판이 한 수직 평면에서는 A단이 움직이지 않도록 구속하고 있으며, 다른 평면에서는 움직일 수 있도록 되어 있다.

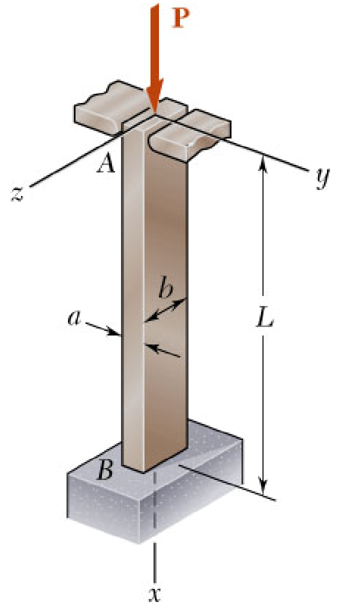
a) 좌굴에 대하여 가장 효과적인 단면의 두 변의 비 a/b 를 결정하라.

b) 이 기둥의 가장 효율적인 단면을 설계하여라.

견본문제 10.1 (Sample Problem 10.1)

풀이:

가장 효율적이 설계는 좌굴 저항이 두 대칭면에서 서로 같을 경우이다. 즉, 세장비 (slenderness ratio) 값이 같아야 하므로,



- xy 평면에서의 좌굴:

$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \qquad r_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}}$$

- xz 평면에서의 좌굴:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}ab^3}{ab} = \frac{b^2}{12} \qquad r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

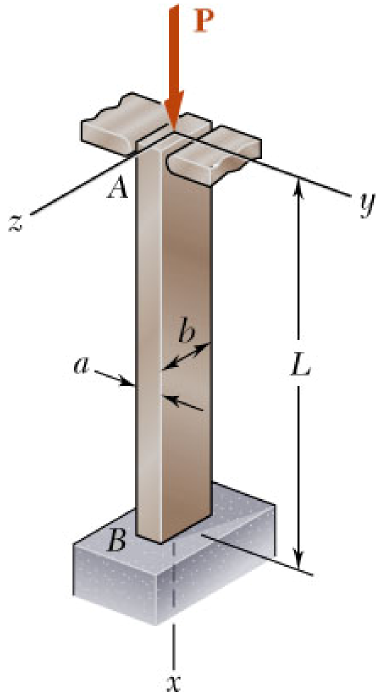
- 가장 효율적인 설계:

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{L_{e,y}}{r_y}$$

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{0.7}{2} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = 0.35}$$

견본문제 10.1 (Sample Problem 10.1)



$L = 0.5\ \text{m}$

$E = 70\ \text{GPa}$

$P = 20\ \text{kN}$

$FS = 2.5$

$a/b = 0.35$

- 설계:

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} = \frac{2(0.5\ \text{m})}{b/\sqrt{12}} = \frac{3.464}{b}$$

$$P_{cr} = (FS)P = (2.5)(20\ \text{kN}) = 50\ \text{kN}$$

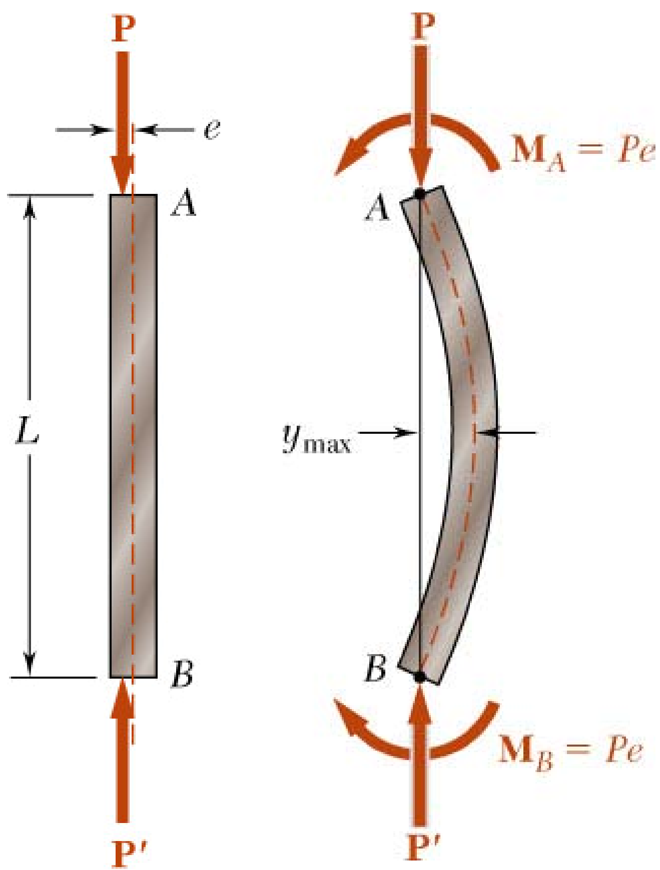
$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{50000\ \text{N}}{(0.35b)b}$$

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} = \frac{\pi^2(70\times10^9\ \text{Pa})}{(3.464/b)^2}$$

$$\frac{50000\ \text{N}}{(0.35b)b} = \frac{\pi^2(70\times10^9\ \text{Pa})}{(3.464/b)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b &= 39.7\ \text{mm} \\ a &= 0.35b = 13.9\ \text{mm} \end{aligned}}$$

편심 축하중; 시컨트 공식 (Eccentric Loading; The Secant Formula)



- 편심 축하중은 중심 축하중 및 우력 (couple) 과 등가이다.
- 작은 편심에서도 굽힘이 일어난다. 좌굴 문제는 과도한 휨(deflection)의 발생 여부이다.
- $P = P_{cr}$ 일 경우, 휨은 무한대

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-Py - Pe}{EI}$$

$$y_{max} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

- 최대응력

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{max} + e)c}{r^2}\right]$$

$$= \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{L_e}{r}\right)\right]$$

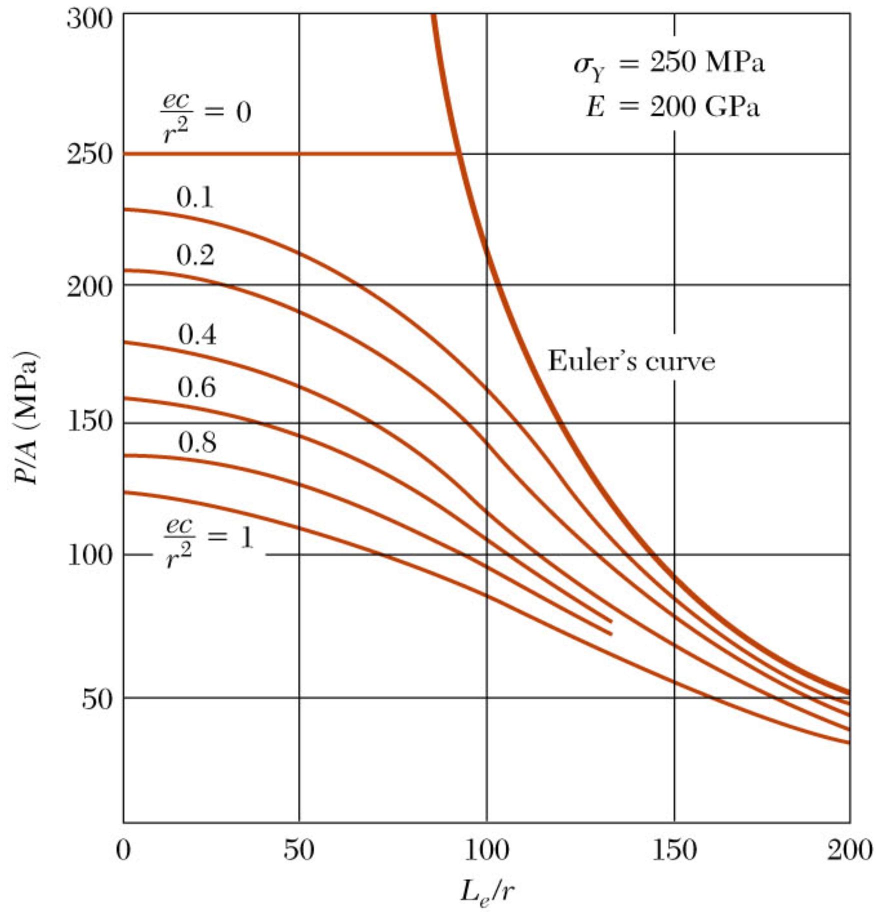
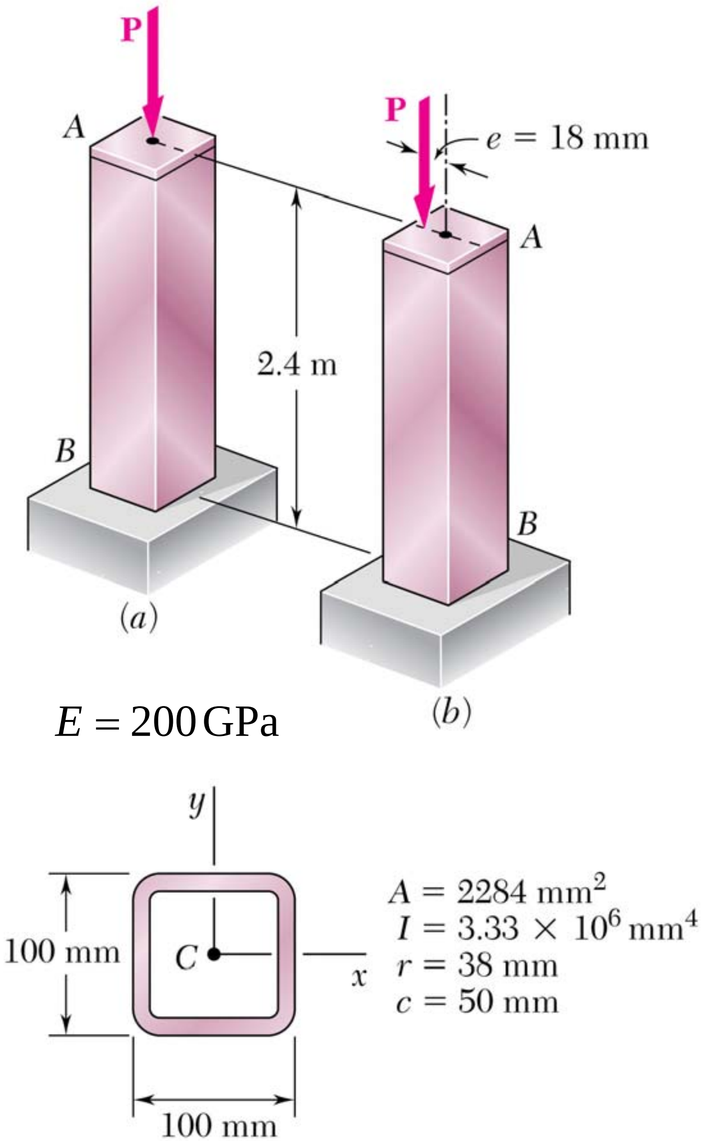


Fig. 10.24 Load per unit area, P / A, causing yield in column.

$$\sigma_{\max} = \sigma_Y = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{L_e}{r}\right)\right]$$

견본문제 10.2 (Sample Problem 10.2)



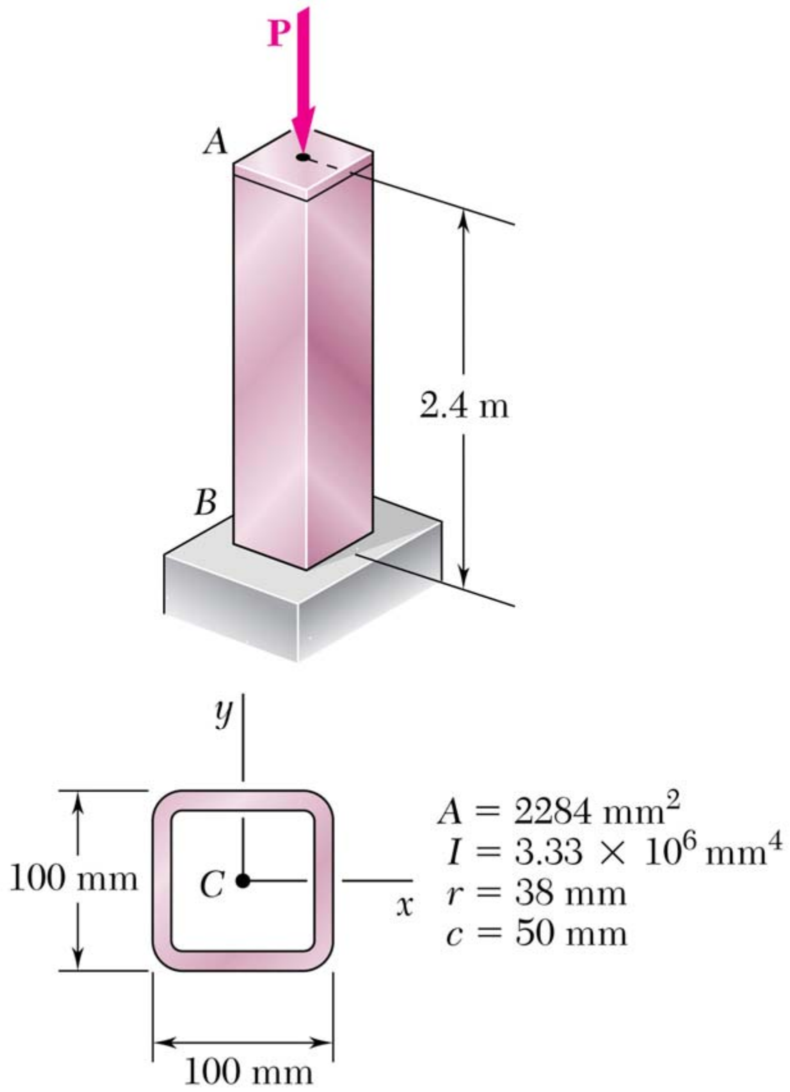
$E = 200\,\text{GPa}$

그림의 단면을 갖는 길이 2.4 m인 구조용 강관기둥에 대하여,

a) 안전계수가 2일 경우, 오일러 공식을 사용해서 기둥의 허용 중심 축하중과 이에 대응하는 수직응력을 구하여라.

b) *a* 항에 구한 허용하중이 기둥의 중심축으로부터 18 mm 인 지점에 작용할 경우, 기둥 상단의 수평처짐과 최대 수직응력을 구하여라.

견본문제 10.2 (Sample Problem 10.2)



풀이:

- 최대 허용 편심축하중:

- 유효길이,

$$L_e = 2(2.4\,\mathrm{m}) = 4.8\,\mathrm{m}$$

- 임계하중,

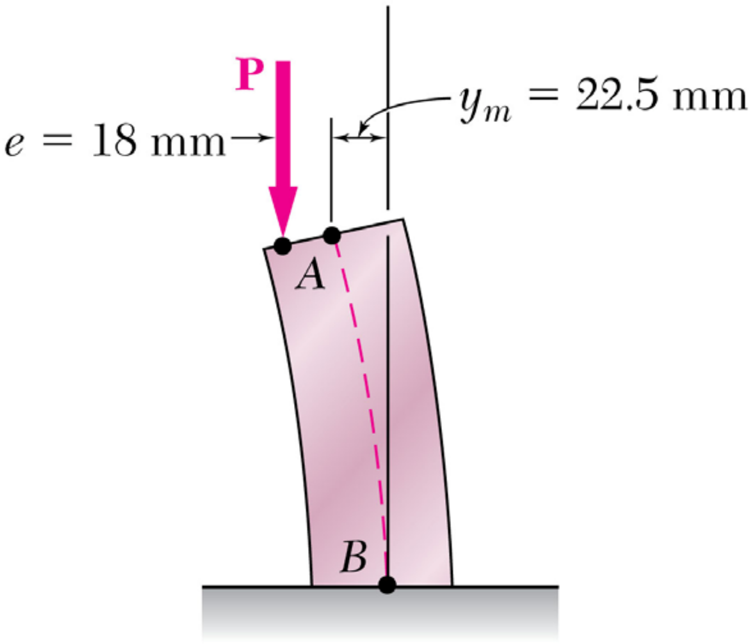
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (200\times 10^9\ \mathrm{Pa})(3.33\times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4)}{(4.8\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 285.3\,\mathrm{kN}$$

- 허용하중,

$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{285.3\,\mathrm{kN}}{2} \qquad \boxed{P_{all} = 142.7\,\mathrm{kN}}$$

$$\sigma = \frac{P_{all}}{A} = \frac{142700\ \mathrm{N}}{2284\times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} \qquad \boxed{\sigma = 62.5\,\mathrm{MPa}}$$



- 편심 축하중:

  - A점의 수평처짐,

$$y_m = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right]$$

$$= (18\text{ mm})\left[\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) - 1\right]$$

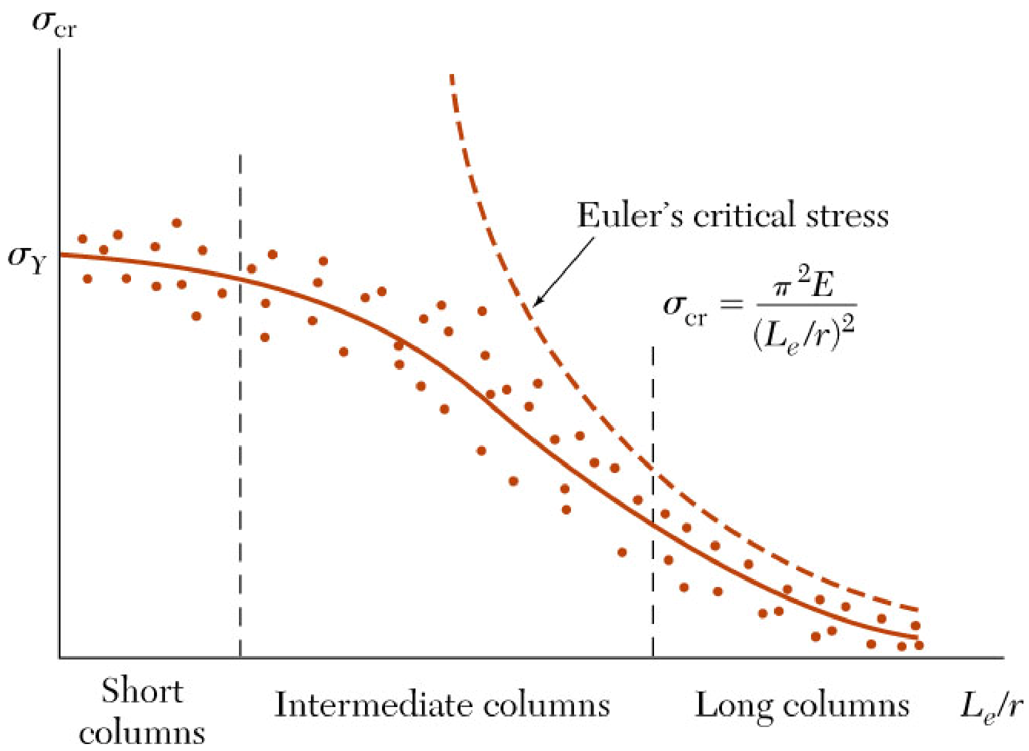
$$\boxed{y_m = 22.5\text{ mm}}$$

  - 최대수직응력,

$$\sigma_m = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

$$= \frac{142700\text{ N}}{2284\times10^{-6}\text{ m}^2}\left[1 + \frac{(0.018\text{ m})(0.05\text{ m})}{(0.038\text{ m})^2}\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\boxed{\sigma_m = 150.2\text{ MPa}}$$



- 앞 절의 해석은 응력은 비례한도 이내에 있고, 초기에 직선이고 균질 (homogeneous) 인 기둥으로 가정

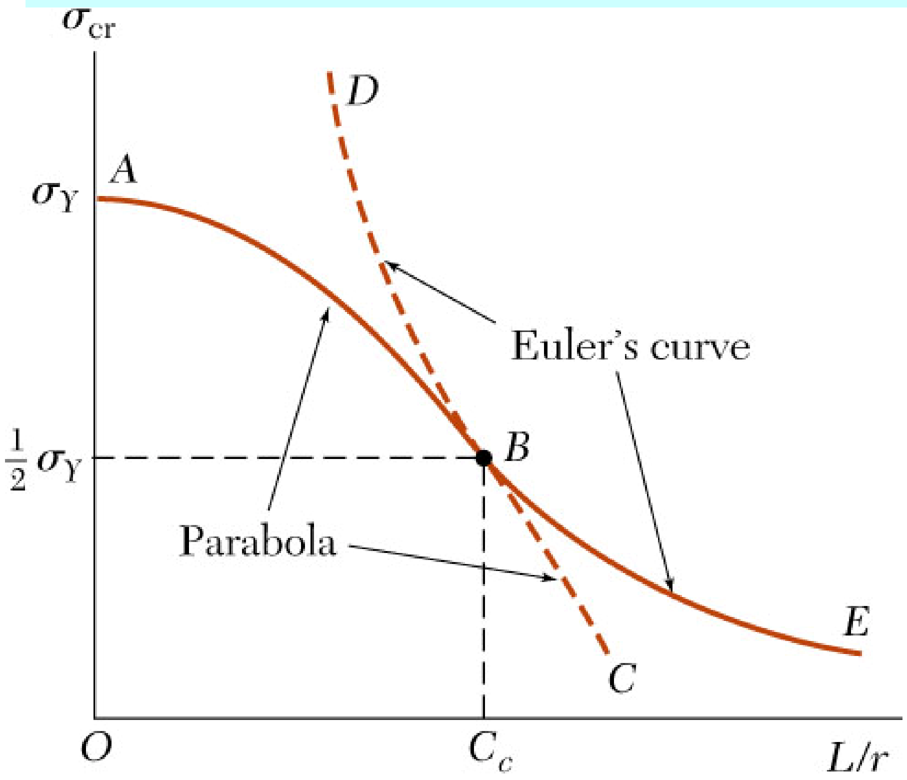
- 많은 실험 데이터에 의하면,
  - 큰 세장비 L_e/r *(장주)*; σ_{cr} 은 오일러 공식에 따르며, E 값에 의존하나 σ_Y 에는 무관
  - 작은 세장비 L_e/r*(단주)*; σ_{cr} 은 E 가 아닌 항복강도 σ_Y 에 의해 결정
  - 중간 세장비 L_e/r*(중간주)*; σ_{cr} 은 σ_Y 와 E 모두에 의존

중심 축하중을 받는 기둥 설계 (Design of Columns Under Centric Load)

구조용 강재

AISC : American Inst. of Steel Construction

미국 강구조 연구소



- $L/r > C_c$ 에 대하여,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{FS}$$

$$FS = 1.92$$

- $L/r > C_c$ 에 대하여,

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2C_c^2}\right] \qquad \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{FS}$$

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{L/r}{C_c} - \frac{1}{8}\left(\frac{L/r}{C_c}\right)^3$$

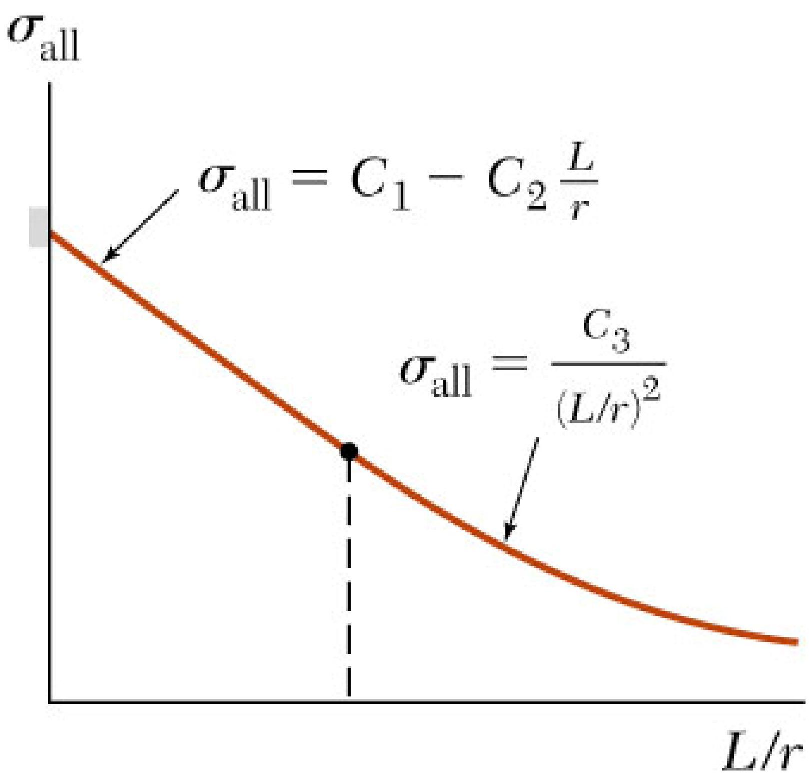
- $L/r = C_c$ 에서,

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2}\sigma_Y \qquad C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}$$

알루미늄

Aluminum Association, Inc.

알루미늄 협회



- Alloy 6061-T6

  $L/r < 66$:

$$\sigma_{all} = [139 - 0.868(L/r)]\ \text{MPa}$$

  $L/r \geq 66$:

$$\sigma_{all} = \frac{351\times10^3\ \text{MPa}}{(L/r)^2}$$

- Alloy 2014-T6

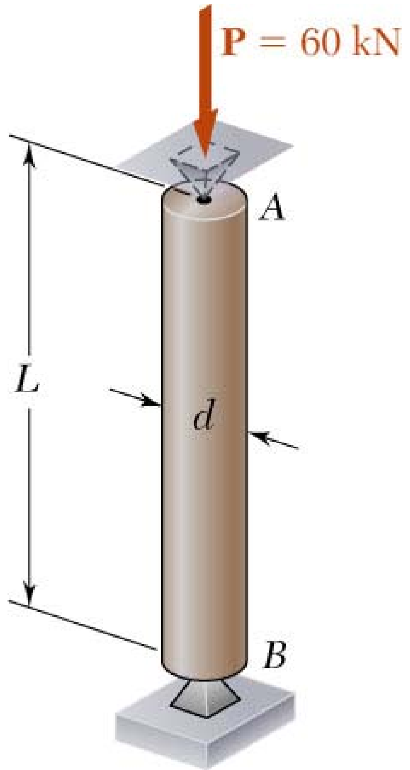
  $L/r < 55$:

$$\sigma_{all} = [212 - 1.585(L/r)]\ \text{MPa}$$

  $L/r \geq 55$:

$$\sigma_{all} = \frac{54000\ \text{ksi}}{(L/r)^2} = \frac{372\times10^3\ \text{MPa}}{(L/r)^2}$$

견본문제 10.4 (Sample Problem 10.4)

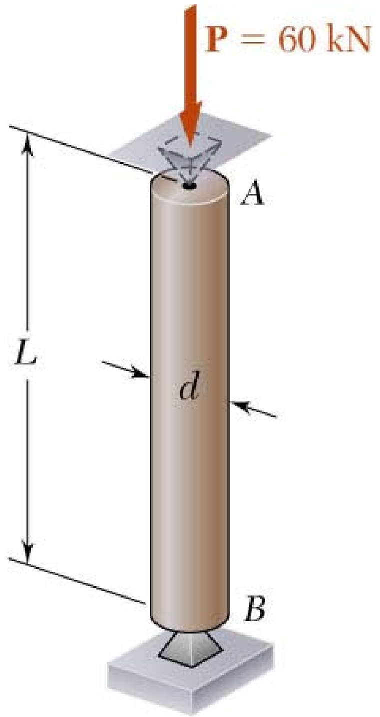


알루미늄 합금 2014-T6 를 사용하여 길이가 (a) L = 750 mm, (b) L = 750 mm 일 경우, P = 60 kN 을 지지할 수 있는 기둥의 최소지름을 결정하여라.

풀이:

- 봉의 지름을 알지 못하므로 세장비를 계산할 수 없다. 세장비 구간을 가정하여 문제를 푼다.
- 가정된 세장비 구간에서 지름을 계산한다.
- 계산된 지름으로 세장비를 계산하고, 가정을 확인한다.

견본문제 10.4 (Sample Problem 10.4)



$$c = \text{cylinder radius}$$

$$r = \text{radius of gyration}$$

$$= \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

- L = 750 mm 에 대하여, L/r > 55 로 가정

- 원기둥 반지름 계산

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \frac{372\times10^3\ \text{MPa}}{(\text{L/r})^2}$$

$$\frac{60\times10^3 N}{\pi c^2} = \frac{372\times10^3\ \text{MPa}}{\left(\frac{0.750\ \text{m}}{\text{c/2}}\right)^2} \qquad c = 18.44\,\text{mm}$$

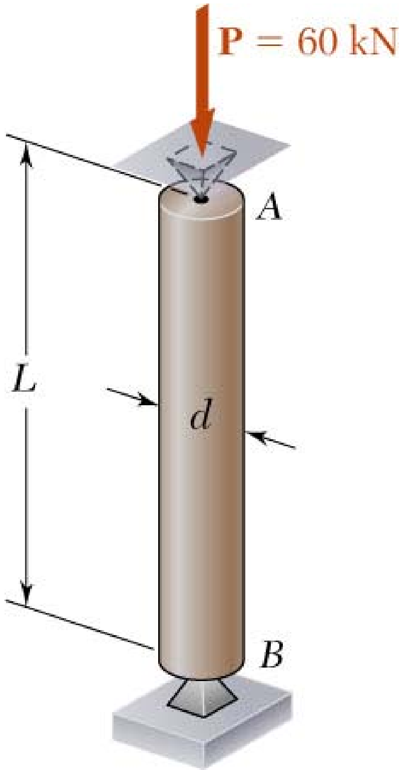
- 가정된 세장비 검토:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750\text{mm}}{(18.44\ \text{mm})} = 81.3 > 55$$

가정은 옳지 않다.

$$\boxed{d = 2c = 36.9\ \text{mm}}$$

견본문제 10.4 (Sample Problem 10.4)



- $L = 300$ mm 에 대하여, $L/r < 55$ 로 가정

- 원기둥 반지름 계산

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \left[212 - 1.585\left(\frac{L}{r}\right)\right]\text{MPa}$$

$$\frac{60\times10^3 N}{\pi c^2} = \left[212 - 1.585\left(\frac{0.3\,\text{m}}{c/2}\right)\right]\times10^6\,\text{Pa}$$

$$c = 12.00\,\text{mm}$$

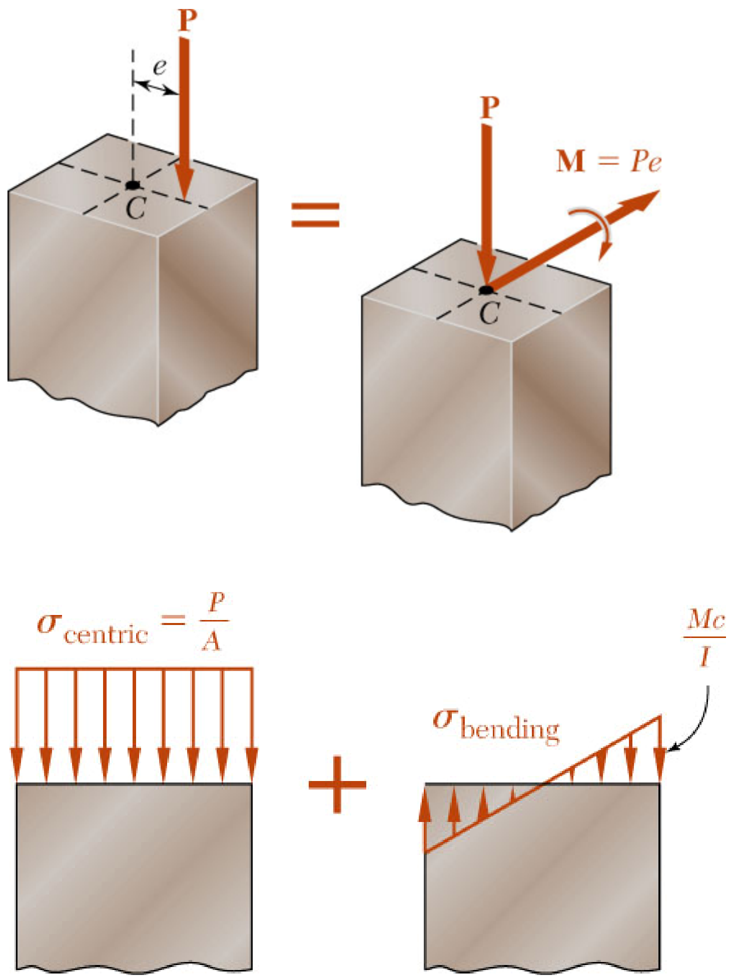
- 가정된 세장비 검토:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{300\,\text{mm}}{(12.00\,\text{mm})} = 50 < 55$$

가정은 옳다. 따라서,

$$\boxed{d = 2c = 24.0\,\text{mm}}$$

편심 축하중을 받는 기둥의 설계 (Design of Columns Under an Eccentric Load)



- 편심 축하중 P 는 중심 축하중 P 와 우력 (모멘트) $M = Pe$ 인 등가 시스템으로 대체

- 수직응력은 중심 축하중과 우력에 의한 응력을 중첩

$$\sigma = \sigma_{centric} + \sigma_{bending}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

- 허용응력 방법:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \le \sigma_{all}$$

- 상호작용 방법:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{centric}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_{bending}} \le 1$$