Fifth SI Edition

CHAPTER

11

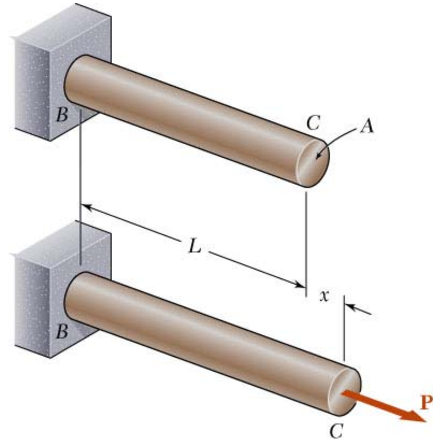
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

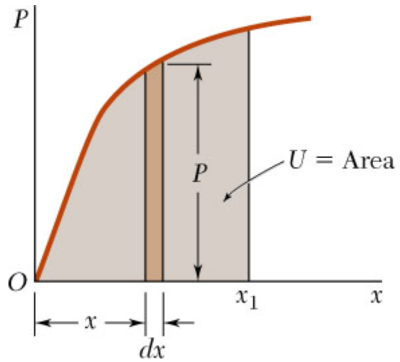
Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

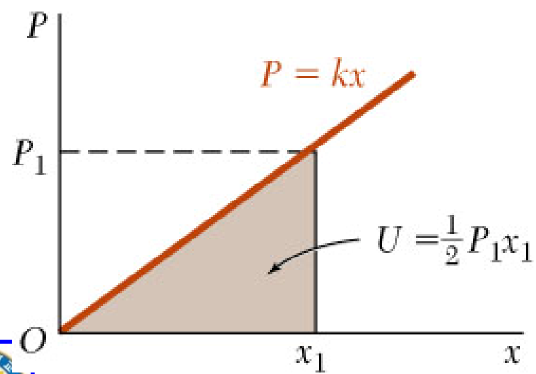
에너지 방법
Energy Methods

목차 (Contents)

변형률 에너지 (Strain Energy)







- 균일한 봉이 서서히 증가하는 하중을 받는 경우
- 봉이 미소량 *dx* 만큼 늘어날 때 하중 P 에 의한 기본일 (*elementary work*)은

$$dU = P\,dx = elementary\ work$$

위의 식은 하중-변형 선도에서 폭 *dx* 의 면적과 같다.

- 봉 변형 x_1 발생시 하중에 의한 총 일(*total work*)은,

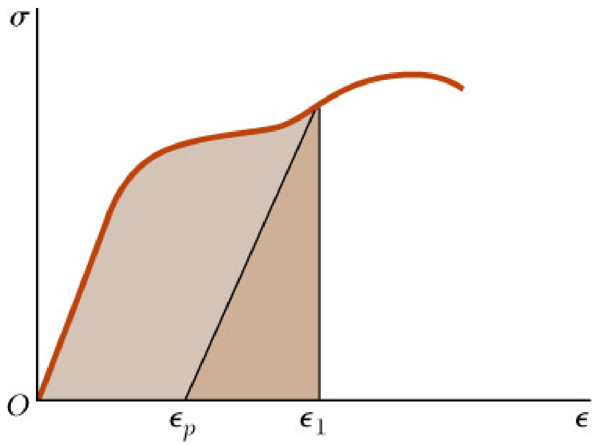
$$U = \int_0^{x_1} P\,dx = total\ work = strain\ energy$$

결과적으로 봉의 변형률에너지 (*strain energy*) 가 증가된다.

- 선형 탄성 변형인 경우에,

$$U = \int_0^{x_1} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}P_1 x_1$$

변형률 에너지 밀도 (Strain Energy Density)



- 치수의 영향을 없애기 위해 단위 체적당 변형률 에너지를 고려하면,

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$

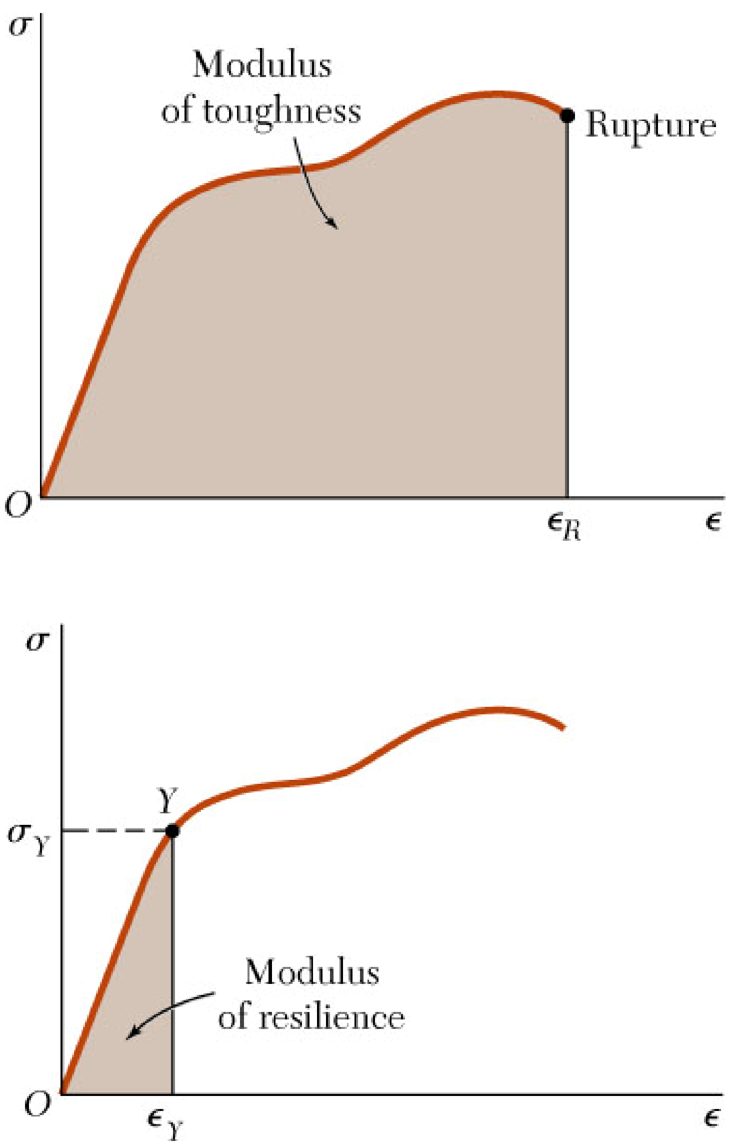
$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x \, d\varepsilon_x = strain\ energy\ density$$

- 변형으로 일어나는 전체 변형률 에너지 밀도 (strain energy density) 는 ε_1 에 이르는 곡선의 면적과 같다.

- 재료에서 하중을 제거한다면 응력은 0 으로 되돌아 가지만 영구변형(permanent deformation)이 남는다. 오로지 삼각형 면적으로 표시된 변형률 에너지만 회복된다.

- 재료 변형에 소모된 에너지의 나머지 부분은 열의 형태로 사라진다.

변형률 에너지 밀도 (Strain-Energy Density)



- $\varepsilon_1 = \varepsilon_R$ 로 놓아 얻어지는 변형률 에너지 밀도를 인성계수 (*modulus of toughness*) 라 한다.

- 재료의 파단을 일으키는 데 소요되는 단위체적당 에너지는 극한강도 뿐만 아니라 재료의 연성에도 관련된다.

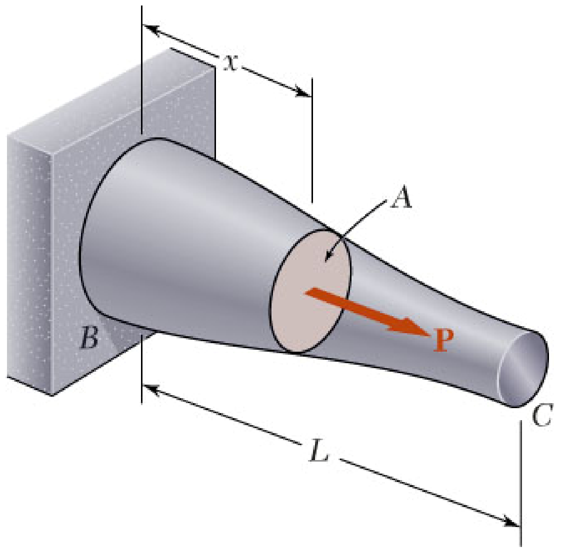
- 응력이 재료의 비례한도 이내일 경우,

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} E\varepsilon_x \, d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

- $\sigma_1 = \sigma_Y$ 일 경우, 변형률-에너지 밀도를 탄력계수(*modulus of resilience*) u_Y 라 하며,

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} = \textit{modulus of resilience}$$

수직응력에 대한 탄성 변형률 에너지 (Elastic Strain Energy for Normal Stresses)

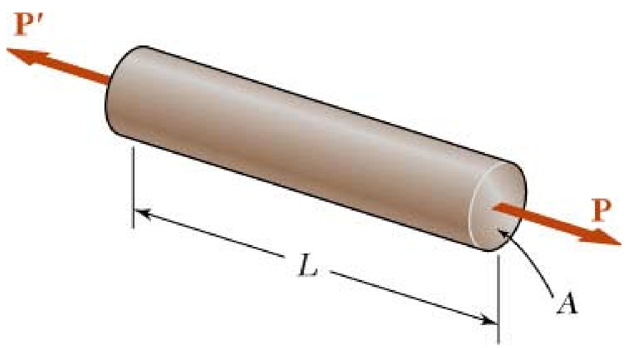


- 비균일 응력 분포를 갖는 요소에서,

$$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \qquad U = \int u\, dV = \text{total strain energy}$$

- $u < u_Y$ 일 경우, 즉 비례한도 내에서는,

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \textit{elastic strain energy}$$

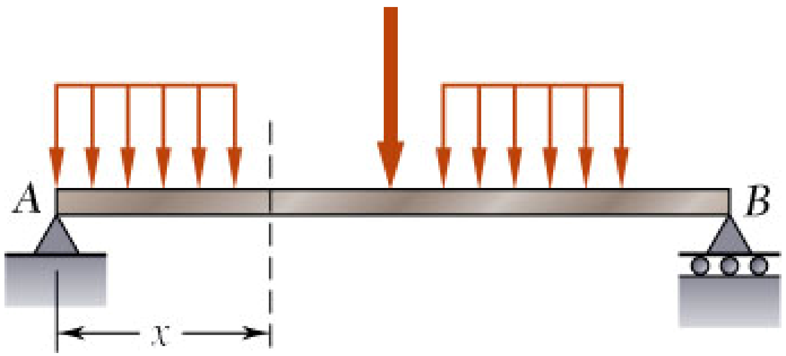


- 축하중을 받을 때, $\sigma_x = P/A \qquad dV = A\,dx$

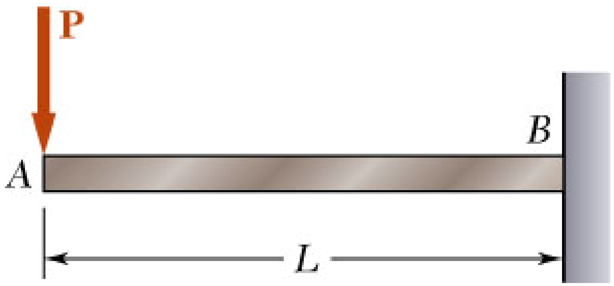
$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$

- 균일 단면 봉일 경우,

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$



$$\sigma_x = \frac{M\,y}{I}$$



- 굽힘하중을 받는 보에서,

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV$$

- $dV = dA\, dx$ 이므로,

$$U = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA\, dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

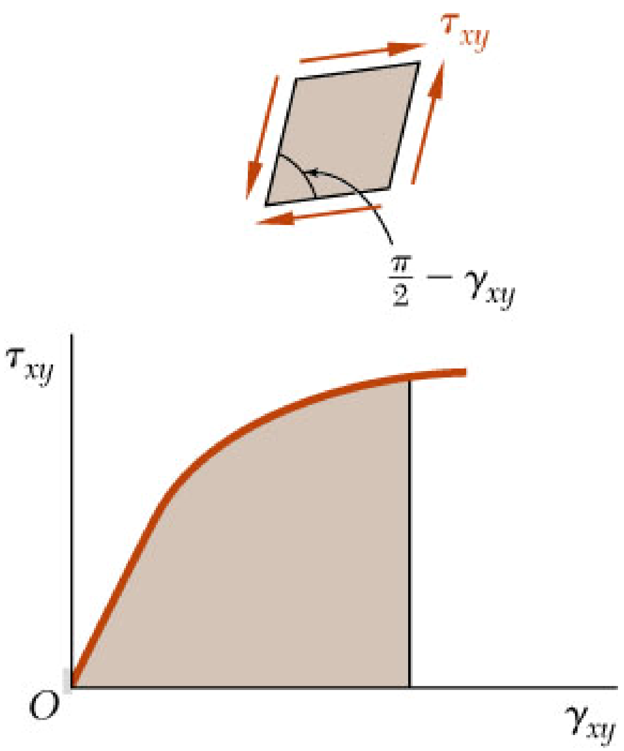
$$= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

- 끝에서 하중을 받는 외팔보에서,

$$M = -Px$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

전단응력에 대한 변형률 에너지 (Strain Energy For Shearing Stresses)



- 재료가 평면 전단응력을 받을 때,

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy}$$

- τ_{xy} 가 비례한도 이내일 경우,

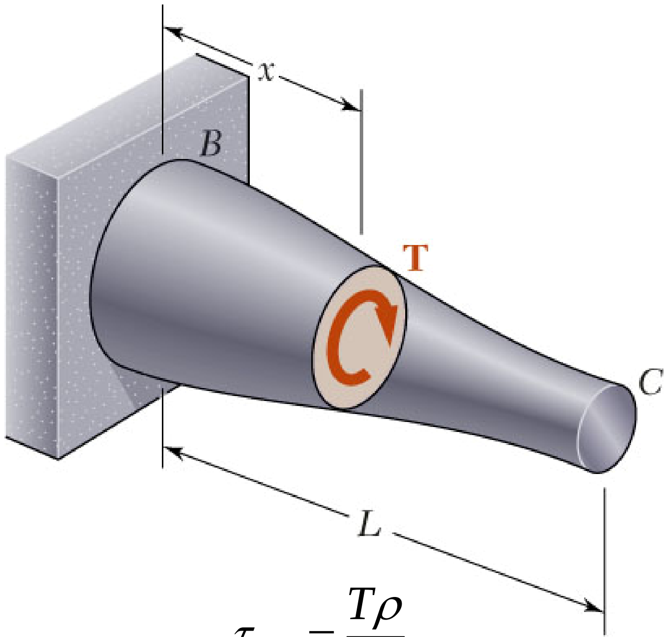
$$u = \tfrac{1}{2} G\gamma_{xy}^2 = \tfrac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

- 전체 변형률 에너지는,

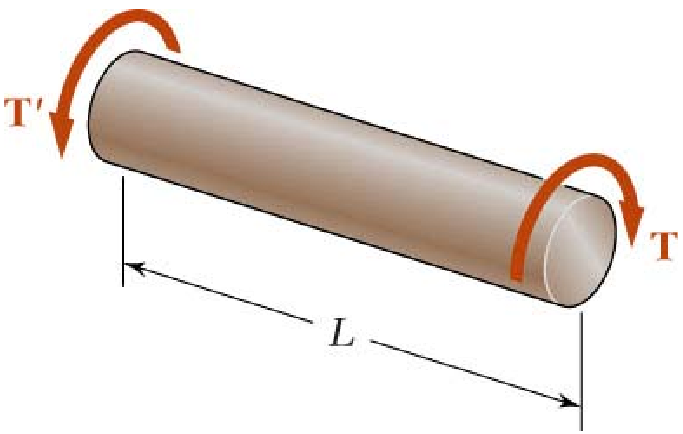
$$U = \int u\, dV$$

$$= \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$$

전단응력에 대한 변형률 에너지 (Strain Energy For Shearing Stresses)



$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J}$$



- 비틀림 하중을 받는 축에 대해서,

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$$

- $dV = dA\, dx$ 이므로,

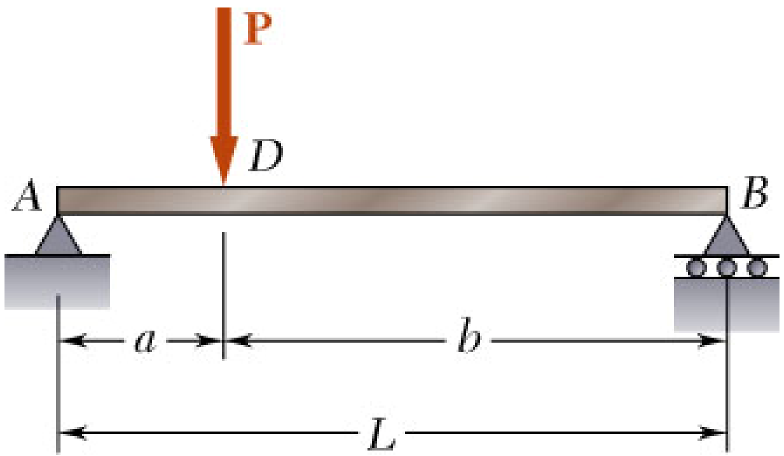
$$U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA\, dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A \rho^2 dA\right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

- 균일단면 축일 경우,

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

견본문제 11.2 (Sample Problem 11.2)



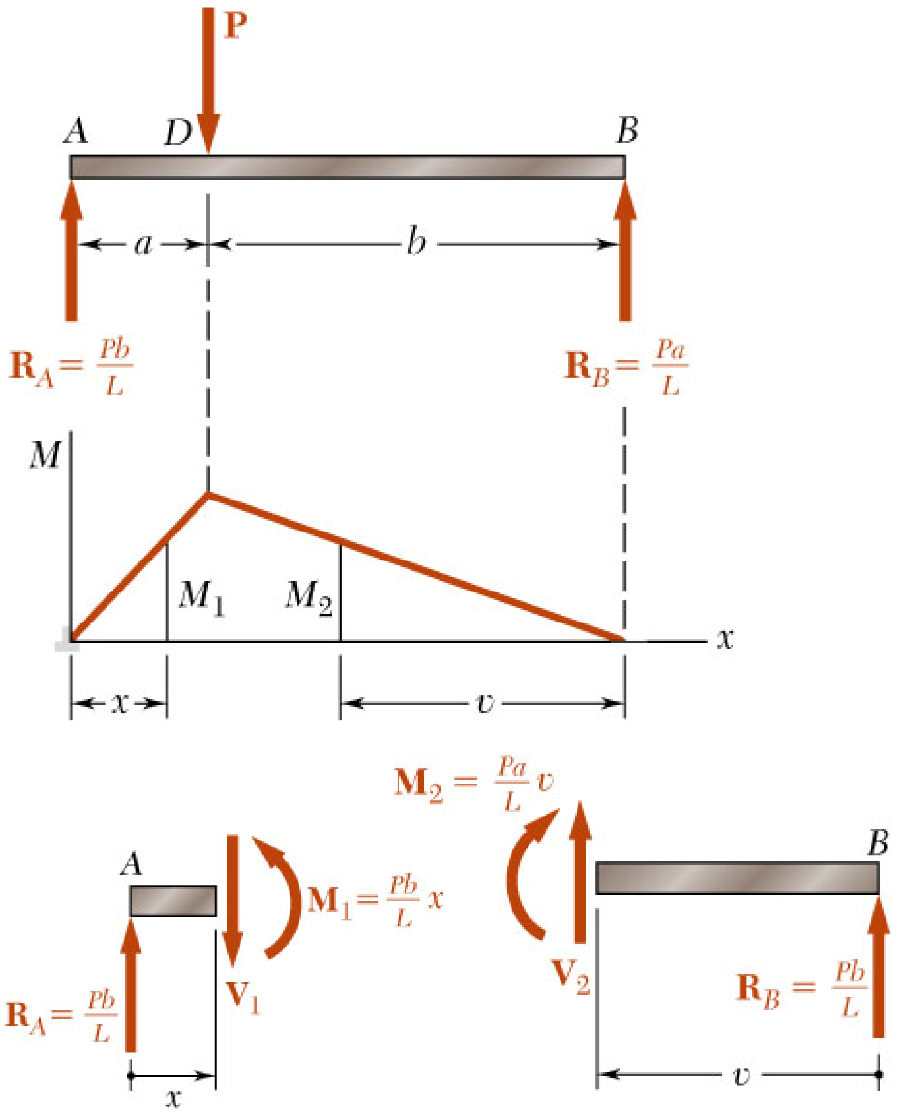
a) 굽힘에 의한 수직응력 영향만을 고려하여 그림과 같이 하중을 받는 보의 변형률 에너지를 결정하라.

b) 보가 W250 x 67, P = 160 kN, L = 3.6 m, a = 0.9 m, b = 2.7 m, 그리고 E = 200 GPa 일 경우, 변형률 에너지를 계산하여라.

풀이:

- 보 전체의 자유물체도로부터 A 와 B 에서 반력을 계산한다.
- 굽힘모멘트 분포 선도를 작성한다.
- 변형률 에너지를 구하기 위해 보의 부피에 대해 적분한다.
- 특정한 조건을 적용하여 변형률 에너지를 계산한다.

견본문제 11.2 (Sample Problem 11.2)



풀이:

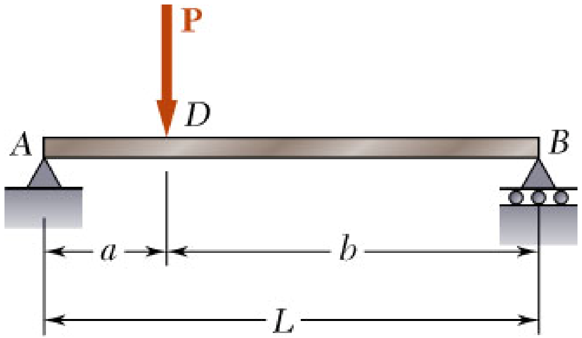
- 보 전체의 자유물체도로부터 A 와 B 에서 반력을 계산한다.

$$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L}$$

- 굽힘모멘트 분포 선도로부터,

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x \qquad M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

견본문제 11.2 (Sample Problem 11.2)



Over the portion AD,

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

Over the portion BD,

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

$P = 160\,\text{kN}$ $\quad L = 3.6\,\text{m}$

$\text{a} = 0.9\,\text{m}$ $\quad b = 2.7\,\text{m}$

$E = 200\,\text{GPa}$ $\quad I = 104\times10^{6}\,\text{mm}^4$

- 보의 부피에 대해 적분하여 변형률 에너지를 구한다.

$$U = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}dv$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a+b)$$

$$\boxed{U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL}}$$

$$U = \frac{(160000\,\text{N})^2(0.9\,\text{m})^2(2.7\,\text{m})^2}{6(200\times10^9\,\text{Pa})(104\times10^{-6}\,\text{m}^4)(3.6\,\text{m})}$$

$$\boxed{U = 336\,\text{Nm}}$$

- 앞 절에서는 단축응력과 평면전단응력 상태에서 변형률 에너지를 구하였다. 일반응력 상태에서는,

$$u = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

- 탄성, 등방성 물체의 주축에 대해서,

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu\left(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a\right)\right]$$

$$= u_v + u_d$$

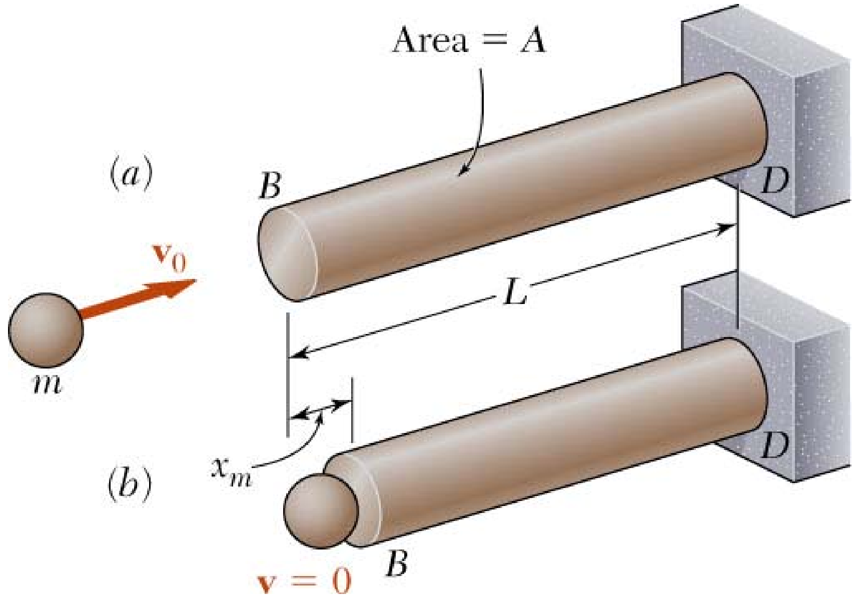
$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c\right)^2 = \text{due to volume change}$$

$$u_d = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_a - \sigma_b\right)^2 + \left(\sigma_b - \sigma_c\right)^2 + \left(\sigma_c - \sigma_a\right)^2\right] = \text{due to distortion}$$

- 최대 비틀림 에너지(*maximum distortion energy*) 파손 기준,

$$u_d < \left(u_d\right)_Y = \frac{\sigma_Y^2}{6G} \quad \text{for a tensile test specimen}$$

충격하중 (Impact Loading)



- 속도 v_0 로 움직이는 질량 m 인 물체가 봉의 끝을 때리는 경우를 고려

- 봉은 충격을 받고 변형. 응력은 최대값이 된 후 사라진다.

- 최대응력 σ_m 을 결정하기 위하여
  - 운동에너지가 전적으로 구조물에 전달된다고 가정,

$$U_m = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

  - 정적인 시험으로부터 얻어진 응력-변형률 선도가 충격하중 하에서도 유효

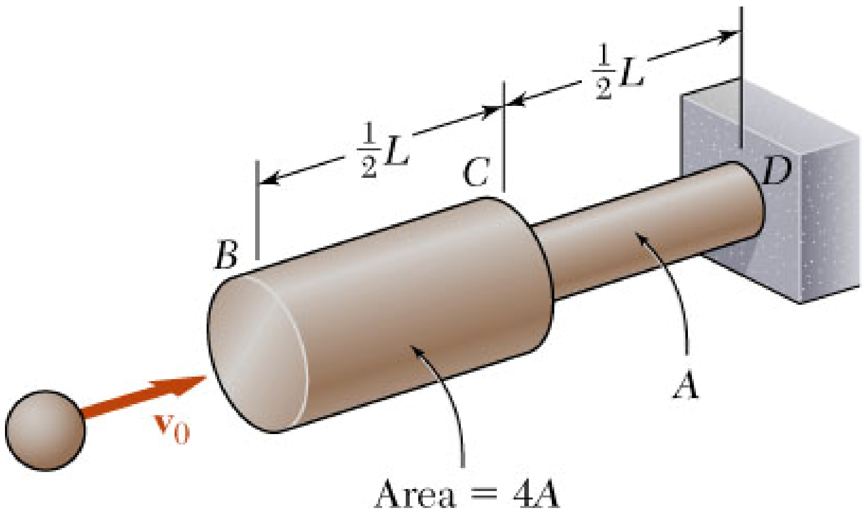
- 변형률 에너지 최대값,

$$U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV$$

- 균일 단면봉의 경우,

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} = \sqrt{\frac{m v_0^2 E}{V}}$$

예제 11.06 (Example 11.06)

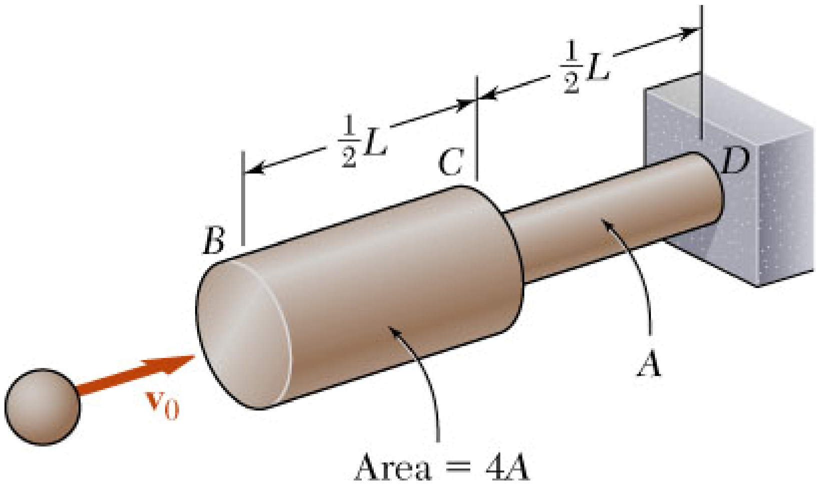


질량 m 인 물체가 속도 v_0 로 움직이는 비균일 단면봉 BCD 의 끝단을 충격한다. BC 부분의 지름이 CD 부분 지름의 2배일 경우, 봉의 최대 수직응력을 구하라.

풀이:

- 지름이 다르므로 수직응력 분포가 균일하지 않다.
- 충격하중과 같은 변형률 에너지를 발생시킬 수 있는 등가의 정하중 P_m 을 구한다.
- 정하중 P_m 으로부터 최대응력을 계산한다.

예제 11.06 (Example 11.06)



풀이:

- 지름이 다르므로 수직응력 분포가 균일하지 않다.

$$U_m = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV \neq \frac{\sigma_m^2 V}{2E}$$

- 충격하중에서 변형률 에너지를 발생시킬 수 있는 등가의 정하중 P_m 은,

$$U_m = \frac{P_m^2 (L/2)}{AE} + \frac{P_m^2 (L/2)}{4AE} = \frac{5}{16} \frac{P_m^2 L}{AE}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5} \frac{U_m AE}{L}}$$

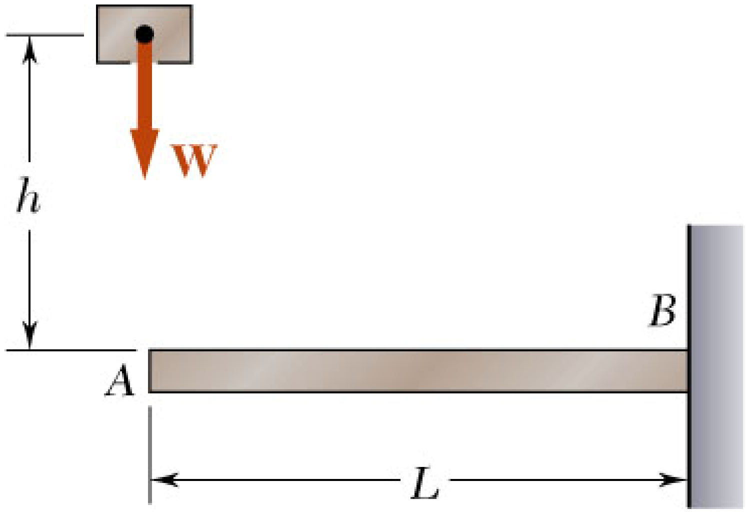
- 정하중 P_m 으로부터 최대응력은,

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{5} \frac{U_m E}{AL}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{5} \frac{m v_0^2 E}{AL}}$$

예제 11.07 (Example 11.07)

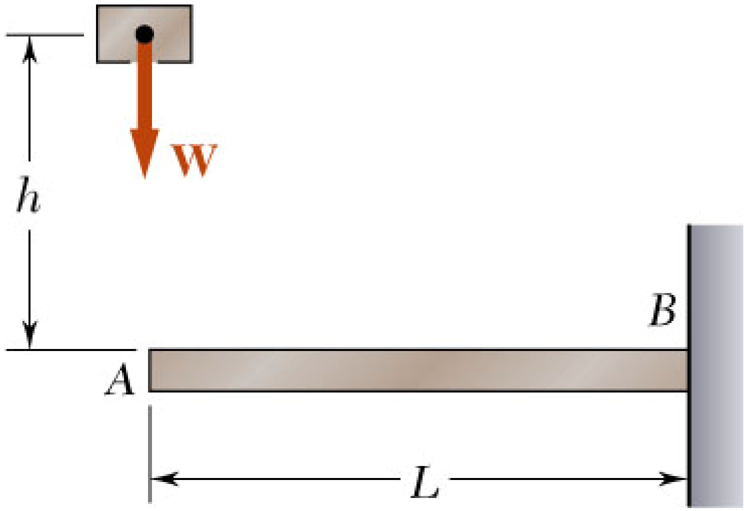


무게 W 인 블록이 높이 h 에서 외팔보의 자유단에 떨어졌다. 이 보에서 최대 응력값을 구하여라.

풀이:

- 수직응력은 횡단면 (transverse section) 에 걸쳐 보의 길이에 따라 선형으로 변화한다.
- 충격시 동일한 변형률 에너지를 발생시킬 수 있는 등가의 정하중 P_m 을 구한다.
- 정하중 P_m 으로부터 최대응력을 계산한다.

예제 11.07 (Example 11.07)



풀이:

- 수직응력은 횡단면에 걸쳐 보의 길이에 따라 선형으로 변화,

$$U_m = Wh$$

$$= \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV \neq \frac{\sigma_m^2 V}{2E}$$

- 충격시 동일한 변형률 에너지를 발생시킬 수 있는 정하중 P_m 에 대해,

끝 단에서 하중을 받는 외팔보에서,

$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI}$$

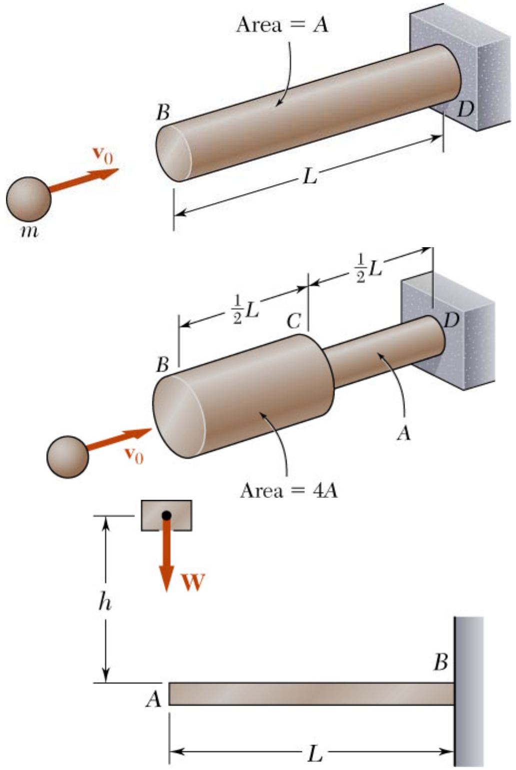
$$P_m = \sqrt{\frac{6U_m EI}{L^3}}$$

- 정하중 P_m 으로부터 최대응력을 계산한다.

$$\sigma_m = \frac{|M|_m c}{I} = \frac{P_m L c}{I}$$

$$= \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}} = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

충격하중에 대한 설계 (Design for Impact Loads)



최대응력 감소는,
- 균일한 응력분포
- 낮은 탄성계수와 높은 항복응력을 갖는 재료
- 큰 체적

- 균일한 봉일 경우,

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}}$$

- 비균일한 봉일 경우,

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m E}{AL}}$$

$$V = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m E}{V}}$$

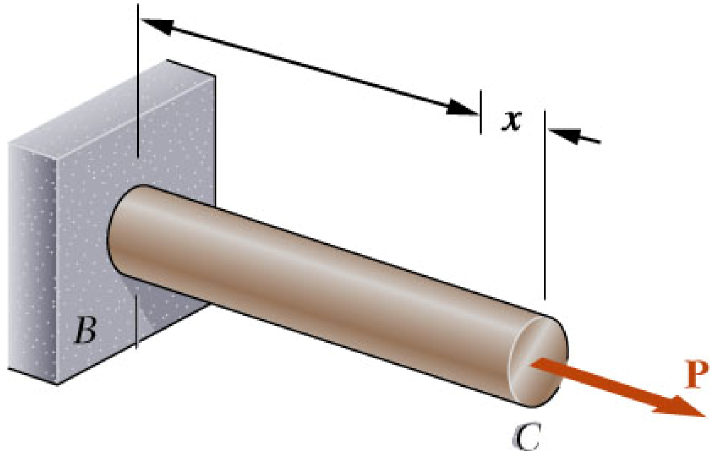
- 외팔보의 경우,

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_m E}{L\left(I/c^2\right)}}$$

$$L\left(I/c^2\right) = L\left(\tfrac{1}{4}\pi c^4/c^2\right) = \tfrac{1}{4}\left(\pi c^2 L\right) = \tfrac{1}{4}V$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_m E}{V}}$$

단일 하중 하에서 일과 에너지 (Work and Energy Under a Single Load)



- 앞절에서, 변형률에너지는 부피에 걸쳐 에너지 밀도를 적분하여 구하였다.
  균일한 봉에 대해서는,

$$U = \int u\,dV = \int \frac{\sigma^2}{2E}\,dV$$

$$= \int_0^L \frac{(P_1/A)^2}{2E} A\,dx = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$

- 변형률에너지는 하나의 하중 P_1 가 한 일로부터,

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx$$

- 탄성변형에 대해서,

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx = \int_0^{x_1} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}P_1 x_1$$

- 힘과 변위 사이의 관계로부터,

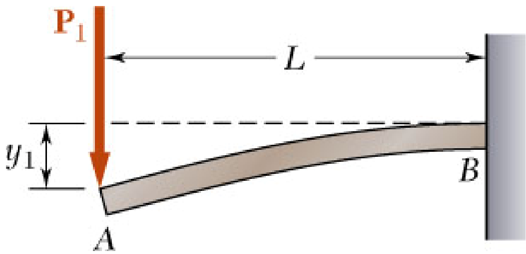
$$x_1 = \frac{P_1 L}{AE}$$

$$U = \tfrac{1}{2}P_1\left(\frac{P_1 L}{AE}\right) = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$

단일 하중 하에서 일과 에너지 (Work and Energy Under a Single Load)

- 변형률에너지는 단일 집중하중을 다른 형태의 일로부터 구할 수 있다.

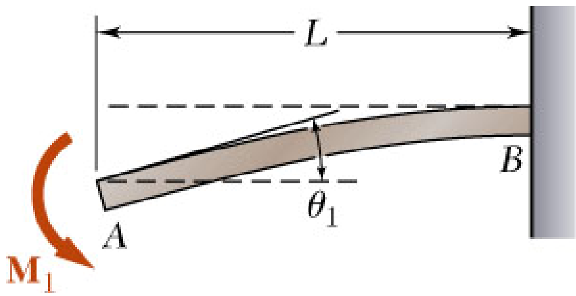
- 횡방향 하중



$$U = \int_0^{y_1} P\,dy = \tfrac{1}{2} P_1 y_1$$

$$= \tfrac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L^3}{3EI} \right) = \frac{P_1^2 L^3}{6EI}$$

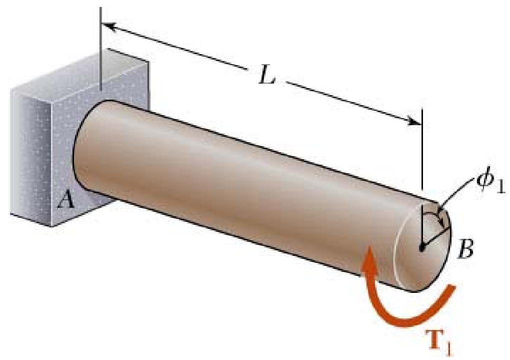
- 굽힘 우력



$$U = \int_0^{\theta_1} M\,d\theta = \tfrac{1}{2} M_1 \theta_1$$

$$= \tfrac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 L}{EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{2EI}$$

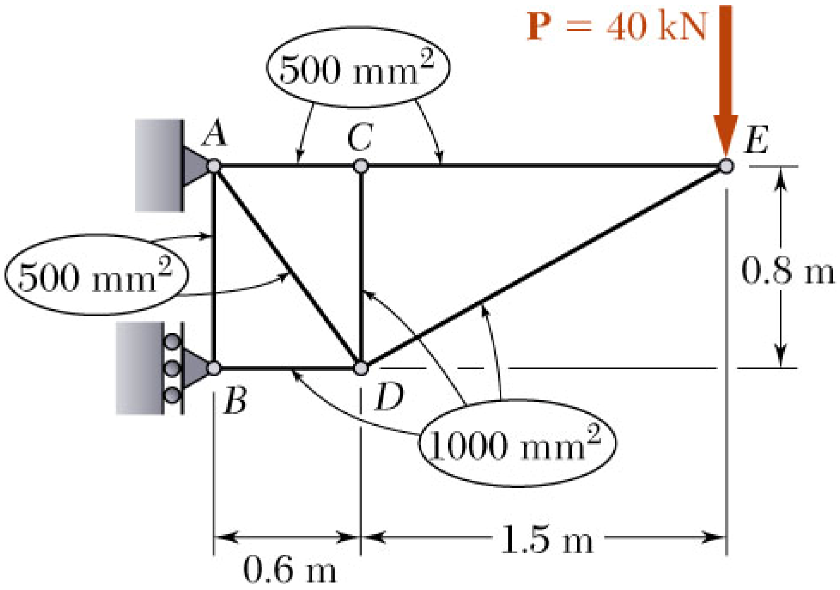
- 비틀림 우력



$$U = \int_0^{\phi_1} T\,d\phi = \tfrac{1}{2} T_1 \phi_1$$

$$= \tfrac{1}{2} T_1 \left(\frac{T_1 L}{JG} \right) = \frac{T_1^2 L}{2JG}$$

Sample Problem 11.4

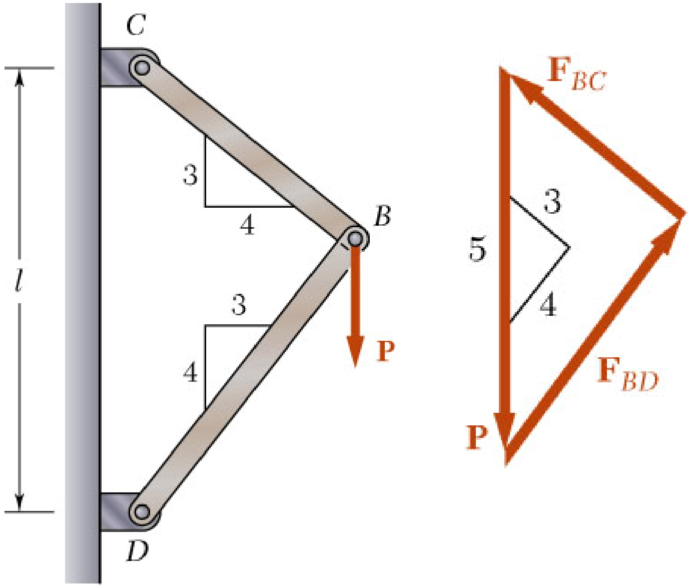


Members of the truss shown consist of sections of aluminum pipe with the cross-sectional areas indicated. Using E = 73 GPa, determine the vertical deflection of the point E caused by the load P.

SOLUTION:

- Find the reactions at A and B from a free-body diagram of the entire truss.
- Apply the method of joints to determine the axial force in each member.
- Evaluate the strain energy of the truss due to the load P.
- Equate the strain energy to the work of P and solve for the displacement.

단일 하중에서 처짐 (Deflection Under a Single Load)



기하학적인 관계로부터,

$$L_{BC} = 0.6l \quad L_{BD} = 0.8l$$

정역학으로부터

$$F_{BC} = +0.6P \quad F_{BD} = -0.8P$$

- 단일 집중하중으로 인한 구조물의 변형률 에너지를 알 수 있다면, 에너지와 하중의 한 일이 같다고 놓아 처짐을 구할 수 있다.

- 구조물의 변형률 에너지,

$$U = \frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{2AE} + \frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{2AE}$$

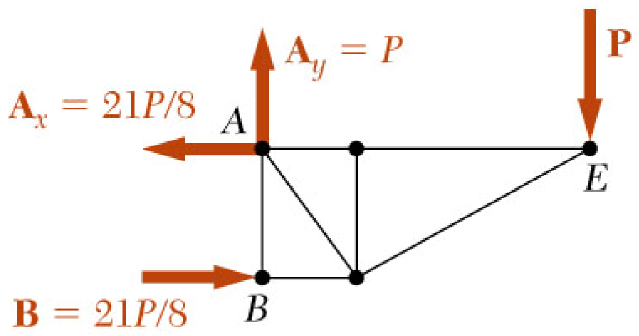
$$= \frac{P^2 l\left[(0.6)^3 + (0.8)^3\right]}{2AE} = 0.364\frac{P^2 l}{AE}$$

- 일과 변형률 에너지가 같다고 놓으면,

$$U = 0.364\frac{P^2 L}{AE} = \tfrac{1}{2} P y_B$$

$$y_B = 0.728\frac{Pl}{AE}$$

견본문제 11.4 (Sample Problem 11.4)

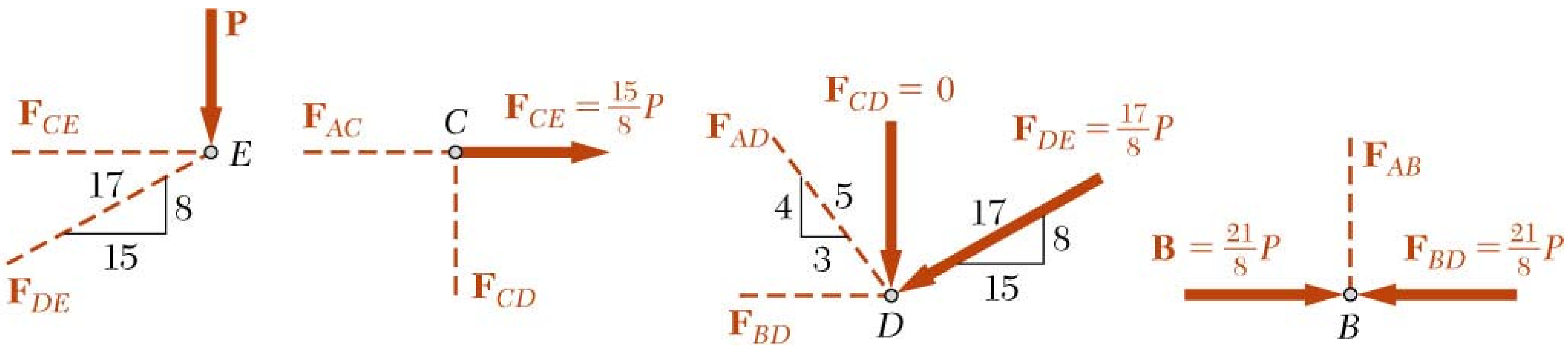


풀이:

- 전체 트러스의 자유물체도로부터 A 와 B 의 반력을 구한다.

$$A_x = -21P/8 \qquad A_y = P \qquad B = 21P/8$$

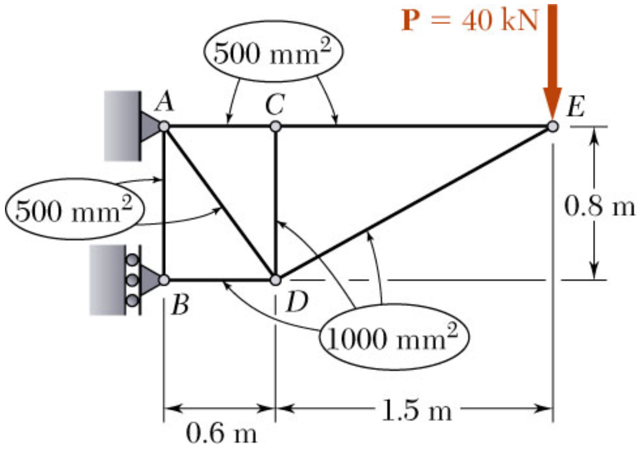
- 조인트법을 적용하여 각 부재의 축하중을 결정한다.



$$F_{DE} = -\frac{17}{8}P \qquad F_{AC} = +\frac{15}{8}P \qquad F_{DE} = \frac{5}{4}P \qquad F_{AB} = 0$$

$$F_{CE} = +\frac{15}{8}P \qquad F_{CD} = 0 \qquad F_{CE} = -\frac{21}{8}P$$

견본문제 11.4 (Sample Problem 11.4)



Member	F_i	L_i, m	A_i, m²	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	1000×10^{-6}	$4\,134P^2$
CD	0	0.8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	1000×10^{-6}	$7\,677P^2$

- 하중 P 에 의한 변형률 에너지를 계산

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i}$$

$$= \frac{1}{2E}\left(29700P^2\right)$$

- 변형률 에너지를 P 에 의한 일과 같다고 놓아 변위에 대해 풀면,

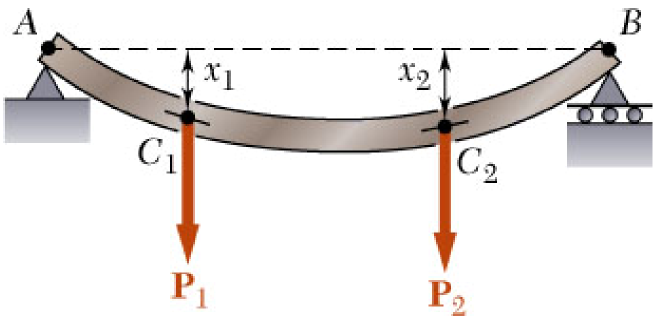
$$\tfrac{1}{2} P y_E = U$$

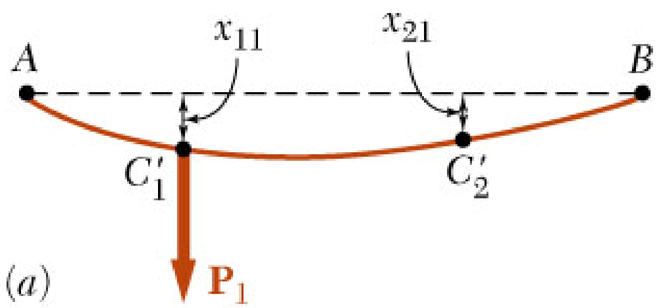
$$y_E = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P}\left(\frac{29700P^2}{2E}\right)$$

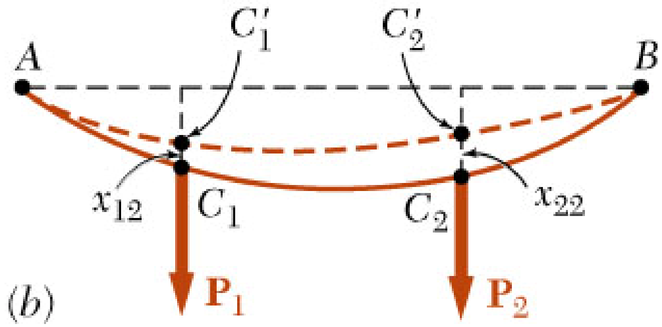
$$y_E = \frac{\left(29.7\times10^3\right)\left(40\times10^3\right)}{73\times10^9}$$

$$\boxed{y_E = 16.27\,\text{mm} \downarrow}$$

여러 하중 하에서 일과 에너지 (Work and Energy Under Several Loads)







- 두 집중하중을 받는 탄성보의 처짐,

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2$$

- P_1 이 먼저 서서히 작용하고 다음으로 P_2 의 작용에 의한 일을 구하여 변형률을 계산한다.

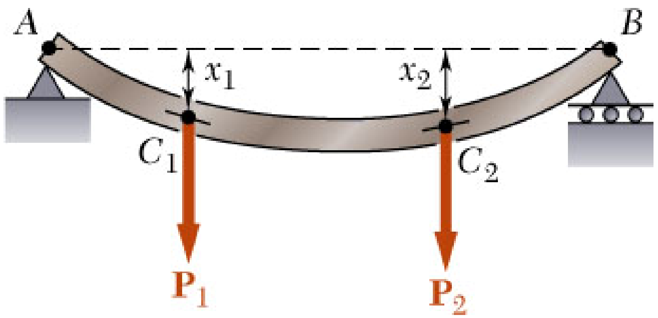
$$U = \tfrac{1}{2}\left(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2\right)$$

- 작용순서(application sequence)를 거꾸로 하면,

$$U = \tfrac{1}{2}\left(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2\right)$$

- 위의 변형률에너지 식들은 반드시 등가이다. 즉 $\alpha_{12}=\alpha_{21}$, 맥스웰 상반정리(*Maxwell's reciprocal theorem*) 에 따른다.

카스틸리아노 정리 (Castigliano’s Theorem)



- 두 개의 집중하중을 받는 탄성 구조물의 변형률에너지,

$$U = \tfrac{1}{2}\left(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2\right)$$

- 하중 P_1 과 P_2에 대해 미분하면,

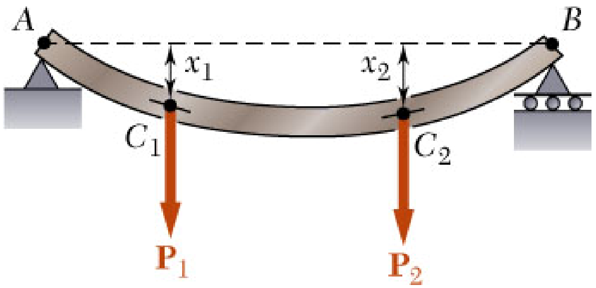
$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1$$

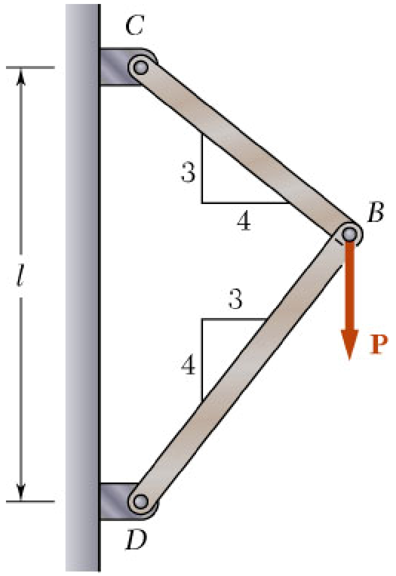
$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2$$

- 카스틸리아노 정리 *(Castigliano’s theorem)*: n 개의 하중을 받는 탄성구조물에서 P_j 작용점의 처짐 x_j 는,

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad \text{and} \quad \theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \qquad \phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

카스틸리아노 정리에 의한 처짐 (Deflections by Castigliano's Theorem)





- 카스틸리아노 정리에 의한 처짐 계산은 변형률에너지 U 를 얻기 위해 하중 P_j 에 대한 미분이 합산이나 적분 전에 얻게 되면 단순해진다.

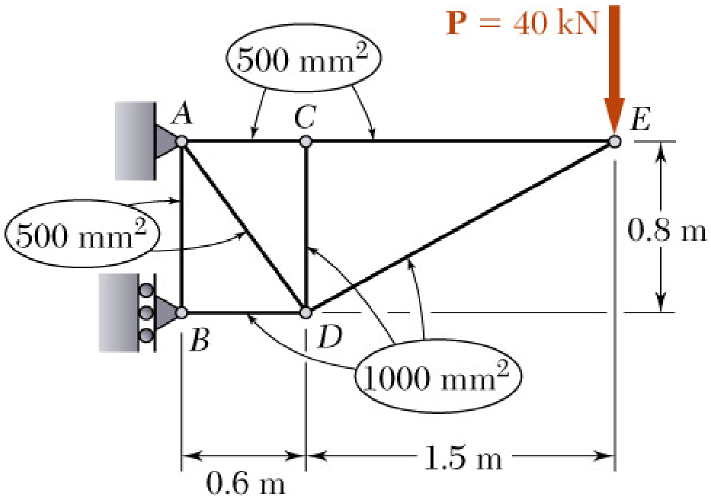
- 보의 경우에,

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$$

- 트러스에 대해,

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \qquad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$

견본문제 11.5 (Sample Problem 11.5)

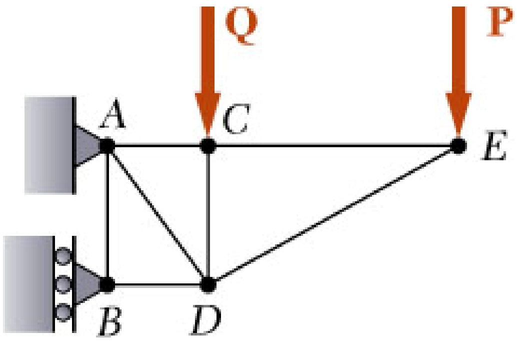


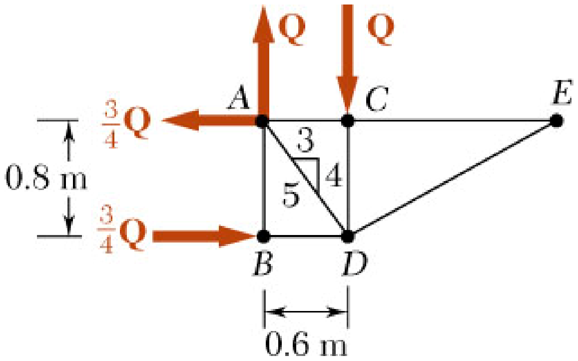
트러스 부재가 그림에 표시된 단면적의 알루미늄 파이프로 구성되어 있다. E = 73 GPa 를 사용하여, 하중 P 에 의한 수직처짐을 결정여라.

풀이:

- 카스틸리아노 정리로부터 절점 C 에 가상(dummy) 수직하중 Q 를 작용시킨다. 전체 자유물체도로부터 가상하중으로 인한 A 와 B 의 반력을 구한다.
- 절점법을 적용하여 Q 에 의한 각 부재의 내력을 결정한다.
- 견본문제 11.4의 결과를 조합하여 하중 P 와 Q 로 인한 트러스 변형률의 Q 에 대한 미분값을 구한다.
- $Q = 0$ 로 놓아, C 의 처짐과 등가인 미분값을 계산한다.

견본문제 11.5 (Sample Problem 11.5)



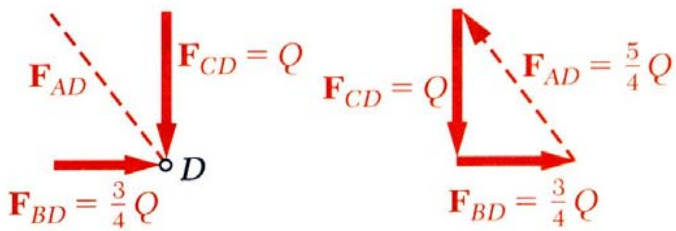


풀이:

- 전체 자유물체도로부터 C 의 가상하중 Q가 작용할 경우, A 와 B 에서 반력을 구한다.

$$A_x = -\tfrac{3}{4}Q \qquad A_y = Q \qquad B = \tfrac{3}{4}Q$$

- 절점법을 적용하여 Q 작용 시 각 부재의 내력을 결정한다.

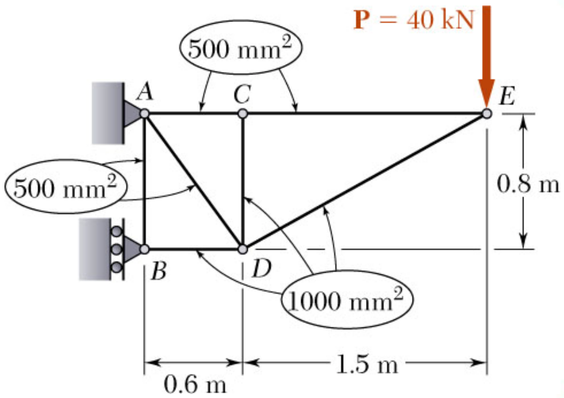


$$F_{CE} = F_{DE} = 0$$

$$F_{AC} = 0;\ F_{CD} = -Q$$

$$F_{AB} = 0;\ F_{BD} = -\tfrac{3}{4}Q$$

견본문제 11.5 (Sample Problem 11.5)



Member	F_i	$\partial F_i/\partial Q$	L_i, m	A_i, m²	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0.6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$\frac{5}{4}$	1.0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-\frac{3}{4}$	0.6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0.8	1000×10^{-6}	$+ 800Q$
CE	$+15P/8$	0	1.5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1.7	1000×10^{-6}	0

- 견본문제 11.4의 결과를 이용하여 하중 P 와 Q 로 인한 트러스 변형률의 Q 에 대한 미분값을 구한다.

$$y_C = \sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i E}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}(4306P + 4263Q)$$

- $Q = 0$ 로 놓고, C 의 처짐과 등가인 미분값을 계산한다.

$$y_C = \frac{4306\left(40 \times 10^3\, N\right)}{73 \times 10^9\,\mathrm{Pa}}$$

$$\boxed{y_C = 2.36\,\mathrm{mm}\downarrow}$$